Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

K. Hensel

H. Hasse L. Schlesinger

Wissenschaftlicher Beirat

H. Brandt / M. Dehn / G. Doetsch / A. Fraenkel / O. Haupt / F. Hausdorff
E. Hellinger / G. Kowalewski / H. Rademacher / K. Reidemeister
A. Rosenthal / C. Schaefer / W. Schmeidler / F. Schottky / O. Toeplitz

Band 168

Heft 1

Ausgegeben den 6. Juni 1932

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1932

Band 168. Heft 1.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Prüfer, Heinz, Untersuchungen über Teilbarkeitseigenschaften in Körpern	1
Hammerstein, A., Über die Eigenwerte gewisser nichtlinearer Differentialgleichungen	37
Brauer, Richard, Über die Konstruktion der Schiefkörper, die von endlichem Rang in bezug auf ein gegebenes Zentrum sind	44

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgend einem Grunde Text-Änderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion ausschließlich unter der Adresse:

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik

Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg-Lahn, Behringweg 7.

Untersuchungen über Teilbarkeitseigenschaften in Körpern.

Von *Heinz Prüfer* in Münster.

Einleitung.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit Körpern, in denen Elemente als ganze Elemente ausgezeichnet sind. Als Teilbarkeitseigenschaft soll jede Eigenschaft eines solchen Körpers gelten, die sich allein mit Hilfe der in die Definition des Körperbegriffes eingehenden Begriffe und des Begriffes des ganzen Elementes formulieren läßt.

Beispiel 1. Sind $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und r Körperelemente, so ist entweder r ein ganzes Element, oder es ist ein Element c im Körper vorhanden, für welches $a_1 c, a_2 c, \ldots, a_n c$ ganz sind, aber mindestens eins der Elemente $ra_1 c, ra_2 c, \ldots, ra_n c$ nicht ganz ist.

Beispiel 2. Hat von den endlich vielen Kongruenzen

$$x \equiv r \pmod{a} \qquad x \equiv s \pmod{b} \qquad \ldots,$$

in denen $a, b, \ldots$ und $r, s, \ldots$ Körperelemente sind, jedes Paar im Körper eine gemeinsame Lösung, so gibt es ein Element des Körpers, welches allen Kongruenzen zugleich genügt. (Dies ist eine Teilbarkeitseigenschaft; denn $x \equiv r \pmod{a}$ bedeutet ja: $\frac{x-r}{a}$ ist ein ganzes Element).

Manche Körper werden die in den Beispielen genannten Eigenschaften haben, andere nicht. Man kann fragen: Sind die beiden Eigenschaften gleichwertig, d. h. hat jeder Körper, der die eine Eigenschaft hat, auch die andere? Oder ist nur eine der beiden Eigenschaften eine Folge der anderen? Oder haben die Eigenschaften nichts mit einander zu tun? Die Untersuchung solcher Fragen nach der Abhängigkeit von Teilbarkeitseigenschaften von einander ist die Hauptaufgabe dieser Arbeit.

Teilbarkeitseigenschaften lassen sich in beliebig großer Zahl aufstellen. Man braucht Gesichtspunkte für eine Auswahl.

Es sollen hier vor allem die Teilbarkeitseigenschaften untersucht werden, die mit der klassischen Theorie der algebraischen Zahlen von Dedekind in Zusammenhang stehen, wenn man diese Theorie abstrakt und möglichst allgemein faßt [1]). Ich beginne deshalb in § 1 mit einer Zusammenstellung der bekannten, in den einfachsten Körpern herrschenden Gesetzmäßigkeiten, deren Nichterfülltsein in den meisten algebraischen Zahlenkörpern den Anstoß zur Aufstellung der Idealtheorie durch Dedekind gegeben hat. In § 2 definiere ich den Idealbegriff axiomatisch. Er ist allgemeiner als der Dedekindsche Begriff. Die Definition kommt darauf hinaus, daß gewisse Dedekindsche Ideale ausgezeichnet und nur diese betrachtet werden. Einige Eigenschaften, welche die Ideale eines Körpers besitzen können, aber nicht zu besitzen brauchen, werden in § 3 genannt und mit einander verglichen.

[1]) Viele klassische Beweise bleiben auch bei der hier vorliegenden größeren Allgemeinheit gültig. Der leichteren Lesbarkeit wegen habe ich auch diese Beweise vollständig hingeschrieben. Die klassischen Arbeiten sind nicht im einzelnen zitiert. Es werde hier nur hingewiesen auf: Dedekind, Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre größten gemeinsamen Teiler.

Eine dieser Eigenschaften liefert, wie in § 4 gezeigt wird, die Bedingung dafür, daß die mit dem allgemeinen Idealbegriff von § 2 aufgebaute Dedekindsche Theorie ihr Ziel, die Herstellung derselben Gesetzmäßigkeit wie in den einfachsten Körpern, erreicht.

Die Ideale werden durch die in § 2 gegebene axiomatische Definition nicht vollständig bestimmt. Drei spezielle Bestimmungsmöglichkeiten werden in §§ 5—7 angegeben. Die in § 3 eingeführten Eigenschaften werden für diese Bestimmungen untersucht; insbesondere wird in diesen Paragraphen und weiter in § 8 die Frage nach ihrer Abhängigkeit voneinander behandelt.

In den letzten Paragraphen (§§ 9—12) wird das Verhalten von Teilbarkeitseigenschaften bei Erweiterung des Körpers untersucht. Diese Untersuchung dient erstens zur Vervollständigung der Untersuchungen in §§ 5—7. Zweitens wird gezeigt, daß die Dedekindsche Theorie in der hier behandelten Allgemeinheit auf die algebraischen Funktionen von beliebig vielen Variablen anwendbar ist. Drittens wird die zweite der klassischen Theorien der algebraischen Zahlen, die von Kronecker, in möglichster Allgemeinheit abstrakt dargestellt. Der Vergleich mit der Dedekindschen Theorie zeigt, daß die Tragweite der beiden Theorien durchaus nicht dieselbe ist.

Außer der Orientierung an der Idealtheorie von Dedekind war für mich bei der Auswahl der Teilbarkeitseigenschaften noch ein zweiter Gesichtspunkt maßgebend: Ich schließe alle Endlichkeitseigenschaften von vornherein aus. Gebilde, deren Existenz nur dann gesichert ist, wenn gewisse im Körper vorgenommene Verfahren nach endlich vielen Schritten zu einem Abschluß kommen, werden nicht betrachtet. Sätze, die nur bei Endlichkeitsvoraussetzungen gelten, kommen, ausgenommen in § 8, nicht vor.

§ 1. Vollständige Körper.

Sei $\mathfrak{K}$ ein beliebiger Körper, also eine Menge von Elementen irgendwelcher Art, in der eine assoziative und kommutative Addition und eine assoziative, kommutative und gegen die Addition distributive Multiplikation definiert sind. Außerdem soll die Subtraktion stets eindeutig ausführbar sein; das Element $a - a$, das Nullelement, möge mit 0 bezeichnet werden. Endlich soll die Division, außer der durch 0, stets eindeutig ausführbar sein; das Element $a : a$, das Einselement, möge mit 1 bezeichnet werden. Entsprechend soll die Summe von n Summanden 1 mit n bezeichnet werden.

Im Körper $\mathfrak{K}$ sei eine Menge $\mathfrak{G}$ von Elementen ausgezeichnet. Die Menge $\mathfrak{G}$ soll erstens ein Ring sein, d. h.: Summe, Differenz und Produkt zweier Elemente von $\mathfrak{G}$ soll stets wieder zu $\mathfrak{G}$ gehören, und außerdem soll $\mathfrak{G}$ das Einselement enthalten. Zweitens soll jedes Element von $\mathfrak{K}$ als Quotient zweier Elemente von $\mathfrak{G}$ darstellbar sein.

In dieser Arbeit werden die Elemente von $\mathfrak{K}$ im allgemeinen mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet. Soll hervorgehoben werden, daß ein Element zu $\mathfrak{G}$ gehört, so wird es mit einem großen lateinischen Buchstaben bezeichnet.

Die Elemente von $\mathfrak{G}$ sollen ganze Elemente, die übrigen Elemente von $\mathfrak{K}$ gebrochene Elemente von $\mathfrak{K}$ heißen. Das Element m von $\mathfrak{K}$ heißt durch das Element d von $\mathfrak{K}$ teilbar — also m ein Vielfaches von d und d ein Teiler von m —, wenn $m : d$ ganz ist. Elemente, die gegenseitig durch einander teilbar sind, heißen assoziiert. Die mit 1 assoziierten Elemente heißen Einheiten.

Ein gemeinsamer Teiler d von Elementen $a, b, \ldots$ aus $\mathfrak{K}$ heißt ein größter gemeinsamer Teiler von $a, b, \ldots$, wenn d Vielfaches jedes gemeinsamen Teilers von $a, b, \ldots$ ist. Ist d ein größter gemeinsamer Teiler von $a, b, \ldots$, so ist auch jedes zu d assoziierte Element, und sonst kein Element von $\mathfrak{K}$, größter gemeinsamer Teiler von $a, b, \ldots$. Haben die Elemente $a, b, \ldots$ den größten gemeinsamen Teiler 1, so heißen sie teilerfremd.

Ist d größter gemeinsamer Teiler von a, b, . . . und sind r, s, . . . zueinander assoziiert, so ist rd größter gemeinsamer Teiler von ra, sb, ...

Beweis: Das Element *rd* ist Teiler von *ra*, *sb*, ... Ist weiter *e* ein gemeinsamer Teiler von *ra*, *sb*, . . ., so sind $a : \frac{e}{r}$, $b : \frac{e}{r}$, . . . ganz. Folglich ist $\frac{e}{r}$ ein Teiler von *d* und *e* ein Teiler von *rd*.

Haben je zwei Elemente von $\mathfrak{R}$ einen größten gemeinsamen Teiler, so soll $\mathfrak{R}$ ein ***vollständiger Körper*** *heißen.*

Eigentlich dürfte man nur von dem „in bezug auf $\mathfrak{G}$ vollständigen" Körper $\mathfrak{R}$ sprechen. Denn $\mathfrak{R}$ kann bei einer Wahl von $\mathfrak{G}$ vollständig, bei einer anderen Wahl nicht vollständig sein. Solange aber nur ein Ring $\mathfrak{G}$ im Körper $\mathfrak{R}$ betrachtet wird, kann der Zusatz „in bezug auf $\mathfrak{G}$" ohne Gefahr fortgelassen werden. Entsprechendes gilt für alle weiteren in dieser Arbeit definierten Teilbarkeitseigenschaften.

In einem vollständigen Körper haben endlich viele Elemente stets einen größten gemeinsamen Teiler.

Beweis: Ist d_2 ein größter gemeinsamer Teiler von a_1 und a_2, d_3 ein größter gemeinsamer Teiler von d_2 und a_3, usw., so ist d_n größter gemeinsamer Teiler von $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

In einem vollständigen Körper ist jedes gebrochene Element in der Form A : B mit teilerfremden A und B darstellbar. Dabei sind A und B bis auf Einheiten eindeutig bestimmt.

Beweis: Ist $A' : B'$ das gegebene Element und D ein größter gemeinsamer Teiler von A' und B', so sind rA' und rB' dann und nur dann teilerfremd, wenn r zu $1 : D$ assoziiert ist.

Ist in einem vollständigen Körper ein Produkt $A_1 \cdot A_2 \cdots A_n$ von ganzen Elementen durch ein ganzes Element B teilbar, so ist $B = B_1 \cdot B_2 \cdots B_n$, wo jedes B_i ganz und ein Teiler des entsprechenden A_i ist.

Beweis: Ist $A_1 \cdot A_2$ durch B teilbar, so sei B_1 ein größter gemeinsamer Teiler von A_1 und B und $B_2 = B : B_1$. Dann ist $A_1' = A_1 : B_1$ zu B_2 teilerfremd. Der größte gemeinsame Teiler A_2 von $A_1' A_2$ und $B_2 A_2$ ist also, da $A_1' A_2$ und $B_2 A_2$ durch B_2 teilbar sind, ein Vielfaches von B_2. Der allgemeine Fall ergibt sich durch vollständige Induktion.

Ist in einem vollständigen Körper ein ganzes Element A auf zwei Arten als Produkt ganzer Elemente dargestellt, so gibt es eine weitere Darstellung von A, aus der die gegebenen durch Zusammenfassung von Faktoren hervorgehen.

Beweis: Ist $A = \prod_i B_i = C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdots$, so ist $C_1 = A_{11} \cdot A_{12} \cdots$, wo A_{1i} ein Teiler von B_i ist. Setzt man $B_i : A_{1i} = B_i'$, so ist $\prod_i B_i' = C_2 \cdot C_3 \cdots$ und $C_2 = A_{21} \cdot A_{22} \cdots$, wo A_{2i} ein Teiler von B_i' ist, usw. Setzt man $E_i = B_i : \prod_j A_{ji}$, so ist $A = \prod_i E_i \cdot \prod_{ij} A_{ji}$ die gesuchte Darstellung.

Auf diesen Sätzen beruht die Durchsichtigkeit der Teilbarkeitsverhältnisse der Elemente eines vollständigen Körpers. Die einfachsten sich in Zahlentheorie und Algebra darbietenden Körper sind vollständig:

1. Der Körper der rationalen Zahlen, wenn $\mathfrak{G}$ der Ring der im gewöhnlichen Sinne ganzen rationalen Zahlen ist.

2. Jeder Körper, wenn alle Elemente als ganz gelten.

3. Der Körper der rationalen Funktionen einer Unbestimmten, mit Koeffizienten aus einem beliebigen Körper, wenn die Polynome als ganz gelten.

In den genannten Beispielen liegt ein besonderer Fall der Vollständigkeit vor. Die Körper sind linear-vollständig, wenn man definiert:

Haben je zwei Elemente a und b von $\mathfrak{K}$ einen gemeinsamen Teiler, der sich in der Form $Xa + Yb$ mit ganzen X, Y darstellen läßt, so soll $\mathfrak{K}$ ***linear-vollständig*** *heißen.*

Man erkennt sofort, daß in einem linear-vollständigen Körper endlich viele Elemente $a, b, c, \ldots$ stets einen gemeinsamen Teiler der Form $Xa + Yb + Zc + \cdots$ haben. Da $Xa + Yb$ durch jeden gemeinsamen Teiler von a und b teilbar ist, ist jeder linear-vollständige Körper auch vollständig.

Beispiele für Körper, die vollständig, aber nicht linear-vollständig sind, werden in § 10 angegeben.

§ 2. Systeme von Idealen.

Eine große Anzahl von Teilbarkeitseigenschaften, zu denen auch die Vollständigkeit und die lineare Vollständigkeit gehören, lassen sich in einfacher Weise definieren und auf ihre Abhängigkeit von einander untersuchen, wenn man sich einer Verallgemeinerung des Dedekindschen Idealbegriffes bedient.

Ist jeder Menge von endlich vielen Elementen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ eines Körpers $\mathfrak{K}$ ein Ding $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ zugeordnet, so soll die Menge dieser Dinge ein ***System von Idealen*** *des Körpers $\mathfrak{K}$ heißen, wenn die im folgenden genannten Bedingungen 1—5 erfüllt sind. Das Ding $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ heißt dann das in dem Idealsystem* ***von den Elementen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ erzeugte Ideal.***

Ideale werden im allgemeinen mit kleinen deutschen Buchstaben bezeichnet. Wenn von „den" Idealen eines Körpers gesprochen wird, sind immer die Ideale eines bestimmten Idealsystems gemeint. Von unendlich vielen Elementen erzeugte Ideale werden in dieser Arbeit nicht betrachtet.

1. *Das Ding $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ist eine Menge von Elementen von $\mathfrak{K}$, die $a_1, a_2, \ldots, a_n$ enthält.*

2. *Enthält die Menge $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ die Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_n$ von $\mathfrak{K}$, so ist*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leqq (b_1, b_2, \ldots, b_m).$$

Aus diesen Bedingungen folgt: Unterscheiden sich die Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und $a_1', a_2', \ldots, a_n'$ nur durch die Reihenfolge, so ist

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_1', a_2', \ldots, a_n').$$

Weiter ist stets

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leqq (a_1, a_2, \ldots, a_n, c_1, c_2, \ldots, c_m)$$

und, wenn $c_1, c_2, \ldots, c_m$ in $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ enthalten sind,

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n, c_1, c_2, \ldots, c_m).$$

Ist

$$\mathfrak{a}_1 = (a_1, b_1, \ldots)\ \mathfrak{a}_2 = (a_2, b_2, \ldots) \cdots \mathfrak{a}_n = (a_n, b_n, \ldots),$$

so ist

$$(a_1, b_1, \ldots,\ a_2, b_2, \ldots, \ldots, a_n, b_n, \ldots)$$

das kleinste Ideal, das $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ als Untermengen enthält. Dieses Ideal soll deshalb mit $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ bezeichnet werden. Die Bedingungen 1 und 2 und die aus ihnen gezogenen Folgerungen gelten dann auch für die Symbole $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n)$. Dabei ist aber unter „Enthalten" nicht mehr die Beziehung zwischen einer Menge und ihren Elementen, sondern die zwischen einer Menge und ihren Untermengen zu verstehen.

3. *Die Menge (a) besteht aus den Vielfachen von a.*

Daraus folgt: Dann und nur dann ist $(a) = (b)$, wenn a und b assoziiert sind.

4. *Ist a in $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ enthalten, so ist $a \cdot b$ in $(a_1 b, a_2 b, \ldots, a_n b)$ enthalten.*

Außer den Elementen $a \cdot b$ enthält die Menge $(a_1 b, a_2 b, \ldots)$ keine weiteren Elemente. Denn ist c ein Element dieser Menge, so ist $\frac{1}{b} \cdot c$ nach 4 ein Element der Menge $(a_1, a_2, \ldots)$.

Ist

$$(a_1', a_2', \ldots) \leqq (a_1, a_2, \ldots),$$

so ist für jedes Element b

$$(a_1' b, a_2' b, \ldots) \leqq (a_1 b, a_2 b, \ldots),$$

also auch für jede endliche Menge von Elementen $b_1, b_2, \ldots$

$$(a_1' b_1, a_2' b_1, \ldots, a_1' b_2, \ldots) \leqq (a_1 b_1, a_2 b_1, \ldots, a_1 b_2, \ldots).$$

Ist jetzt

$$\mathfrak{a} = (a_1, a_2, \ldots) = (a_1', a_2', \ldots)$$
$$\mathfrak{b} = (b_1, b_2, \ldots) = (b_1', b_2', \ldots),$$

so wird also

$$\mathfrak{c} = (a_1 b_1, a_2 b_1, a_1 b_2, \ldots) = (a_1' b_1, a_2' b_1, a_1' b_2, \ldots) = (a_1' b_1', a_2' b_1', a_1' b_2', \ldots).$$

Das Ideal $\mathfrak{c}$ hängt demnach nur von den Idealen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, nicht von der Wahl ihrer erzeugenden Elemente ab. Man kann also definieren:

Sind

$$\mathfrak{a} = (a_1, a_2, \ldots) \qquad \mathfrak{b} = (b_1, b_2, \ldots)$$

Ideale desselben Systems von Idealen, so heißt das Ideal

$$(a_1 b_1, a_2 b_1, a_1 b_2, \ldots)$$

das ***Produkt*** $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ *der Ideale* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$.

Die Multiplikation der Ideale hat mit der Multiplikation der Elemente eines Körpers einige der Grundeigenschaften gemeinsam: Sie ist assoziativ und kommutativ. Es gilt ferner ein Analogon zum distributiven Gesetz:

$$(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots) \cdot \mathfrak{b} = (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}, \mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}, \ldots).$$

Es ist weiter für jedes Ideal $\mathfrak{a}$

$$(1) \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \qquad\qquad (0) \cdot \mathfrak{a} = (0).$$

Ist $\mathfrak{a} \neq (0)$ und $\mathfrak{b} \neq (0)$, so ist auch $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \neq (0)$. Die Division von Idealen braucht aber, wie sich zeigen wird, weder stets ausführbar, noch eindeutig zu sein. Nur aus $(r) \cdot \mathfrak{a} = (r) \cdot \mathfrak{b}$ kann man, wenn $r \neq 0$, ohne weiteres auf $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ schließen.

Besteht das Ideal $\mathfrak{a}$ nur aus ganzen Elementen von $\mathfrak{R}$, so heißt $\mathfrak{a}$ ein ganzes Ideal. Ist $\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{x}$ ein ganzes Ideal, so heißt das Ideal $\mathfrak{a}$ durch das Ideal $\mathfrak{b}$ teilbar, $\mathfrak{b}$ ein Teiler von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}$ ein Vielfaches von $\mathfrak{b}$ [2]). Die Teilbarkeit der Ideale hat entsprechende Eigenschaften wie die der Körperelemente: Jedes Ideal ist durch sich selbst teilbar. Ist $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}$ durch $\mathfrak{c}$ teilbar, so ist auch $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{c}$ teilbar. Sind $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots$ durch $\mathfrak{b}$ teilbar, so ist auch $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots)$ durch $\mathfrak{b}$ teilbar. Die ganzen Ideale sind die durch (1) teilbaren Ideale. Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ganze Ideale, so ist auch $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ ganz.

Weiter ist die Multiplikation der Ideale monoton gegenüber der Beziehung des Enthaltens: Ist a in $\mathfrak{a}$ und b in $\mathfrak{b}$ enthalten, so ist $a \cdot b$ in $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ enthalten. Ist $\mathfrak{a}' \leqq \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}' \leqq \mathfrak{b}$, so ist auch $\mathfrak{a}' \mathfrak{b}' \leqq \mathfrak{a} \mathfrak{b}$. Dagegen braucht aus $\mathfrak{a}' \mathfrak{b} \leqq \mathfrak{a} \mathfrak{b}$ nicht $\mathfrak{a}' \leqq \mathfrak{a}$ zu folgen. Nur aus $\mathfrak{a}' \cdot (r) \leqq \mathfrak{a} \cdot (r)$ kann man, wenn $r \neq 0$, ohne weiteres auf $\mathfrak{a}' \leqq \mathfrak{a}$ schließen.

---

[2]) Andere Bezeichnung als bei Dedekind.

Ist $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{b}$ teilbar, so ist stets $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$. Ein Ideal ist also nur zu sich selbst „assoziiert". Aus $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$ folgt aber nicht die Teilbarkeit von $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{b}$. Nur aus $\mathfrak{a} \leqq (r)$ kann man ohne weiteres auf die Teilbarkeit von $\mathfrak{a}$ durch (r) schließen.

Noch einer letzten Bedingung, die aber erst in § 9 wesentlich gebraucht wird, sollen die Mengen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ genügen:

5. *Die Menge (a, b) enthält das Element $a + b$.*

§ 3. Besondere Eigenschaften von Idealsystemen.

In § 2 wurde bereits bei einigen nahe liegenden Sätzen darauf hingewiesen, daß sie nicht in allen Idealsystemen gelten. Die Gültigkeit dieser Sätze und einige weitere Eigenschaften von Idealsystemen sollen jetzt auf ihre Abhängigkeit voneinander untersucht werden. Es werden vier Eigenschaften herausgestellt, von denen jede eine Folge der vorhergehenden ist. Beispiele werden später zeigen, daß es zu jeder der vier Eigenschaften Idealsysteme gibt, welche diese Eigenschaft, nicht aber die vorhergehende Eigenschaft besitzen. Ebenso wird sich zeigen, daß auch die schwächste der vier Eigenschaften nicht allen Idealsystemen zukommt.

Die folgenden Untersuchungen beziehen sich auf ein System von Idealen, das im betrachteten Körper willkürlich, aber ein für allemal fest gewählt ist.

Eigenschaft A: *Jedes Ideal wird durch ein Element erzeugt.*

Man erkennt sofort:

Die Eigenschaft A *besteht schon, wenn jedes von zwei Elementen erzeugte Ideal durch ein Element erzeugt wird.*

Die in § 1 genannten entsprechenden Sätze über Vollständigkeit und lineare Vollständigkeit sind, wie in § 7 und § 5 gezeigt wird, Spezialfälle dieses Satzes.

Eigenschaft B: *Ist $\mathfrak{a} \geqq \mathfrak{b}$, so ist stets $\mathfrak{a}$ ein Teiler von $\mathfrak{b}$.*

Man erkennt sofort:

Jeder Körper mit der Eigenschaft A *hat die Eigenschaft* B.

Mit B *ist gleichwertig: Die Division eines Ideales durch ein von* (0) *verschiedenes Ideal ist stets ausführbar.*

Beweis: I. Ist die Eigenschaft B vorhanden, so multipliziere man, um die Gleichung $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{b}$ zu lösen, $\mathfrak{b}$ mit einem solchen Ideal $(c) \neq (0)$, daß $\mathfrak{a} \geqq (c) \cdot \mathfrak{b}$ ist. Dann existiert ein Ideal, für welches

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{y} = (c) \cdot \mathfrak{b} \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{a} \cdot \left(\frac{1}{c}\right) \cdot \mathfrak{y} = \mathfrak{b}$$

wird.

II. Ist die Gleichung $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{x} = (1)$ lösbar und ist $\mathfrak{a} \geqq \mathfrak{b}$, so ist $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{x}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}$. Da das Produkt eines Elementes aus $\mathfrak{a}$ mit einem Element aus $\mathfrak{x}$ stets ganz ist, gilt dies auch von jedem Produkt eines Elementes aus $\mathfrak{b}$ mit einem Element aus $\mathfrak{x}$. Also ist $\mathfrak{x}\mathfrak{b}$ ganz und $\mathfrak{b}$ durch $\mathfrak{a}$ teilbar.

Aus Teil II des Beweises folgt genauer:

Die Eigenschaft B *besteht schon, wenn es zu jedem Ideal $\mathfrak{a} \neq (0)$ ein Ideal $\mathfrak{x}$ gibt, für welches $\mathfrak{a}\mathfrak{x} = (1)$ ist.*

Die Eigenschaft B *besteht schon, wenn es zu jedem durch zwei Elemente erzeugten Ideal $\mathfrak{a}$ ein Ideal $\mathfrak{x}$ gibt, für welches $\mathfrak{a}\mathfrak{x} = (1)$ ist.*

Beweis: Man braucht nur zu zeigen: Läßt sich für $n \geqq 2$ jedes von n Elementen erzeugte Ideal durch Multiplikation mit einem Ideal in (1) überführen, so gilt dies auch

für jedes von $n+1$ Elementen erzeugte Ideal. Sei $(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1})$ das gegebene Ideal. Man bestimme $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ so, daß

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot \mathfrak{x} = (1) \qquad (a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}) \cdot \mathfrak{y} = (1)$$
$$(a_1, a_{n+1}) \cdot \mathfrak{z} = (1)$$

wird. Wegen

$$(a_1) \cdot \mathfrak{x} \leqq (1) \qquad (a_{n+1}) \cdot \mathfrak{y} \leqq (1)$$

erhält man dann:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}) \cdot ((a_1)\mathfrak{x}\mathfrak{z}, (a_{n+1})\mathfrak{y}\mathfrak{z})$$
$$= ((a_1, \ldots, a_n)(a_1)\mathfrak{x}\mathfrak{z},\ (a_{n+1})(a_1)\mathfrak{x}\mathfrak{z},\ (a_1)(a_{n+1})\mathfrak{y}\mathfrak{z},\ (a_2, \ldots, a_{n+1})(a_{n+1})\mathfrak{y}\mathfrak{z})$$
$$= ((a_1)\mathfrak{z}, (a_{n+1})\mathfrak{z}) = (1).$$

Jeder vollständige Körper mit der Eigenschaft B *hat die Eigenschaft* A.

Beweis: Ist d ein größter gemeinsamer Teiler von $a_1, a_2, \ldots, a_n$, so ist sicher

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leqq (d).$$

Ist weiter

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_m) = (1),$$

so haben für jedes i die Elemente $a_1 x_i, a_2 x_i, \ldots, a_n x_i$ das Einselement als gemeinsamen Teiler. Der größte gemeinsame Teiler dx_i ist also ganz. Daraus folgt:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geqq (a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot (dx_1, dx_2, \ldots, dx_m) = (d).$$

Eigenschaft Γ: *Aus* $\mathfrak{a}\mathfrak{c} \geqq \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ *und* $\mathfrak{c} \neq (0)$ *folgt* $\mathfrak{a} \geqq \mathfrak{b}$.

Jeder Körper mit der Eigenschaft B *hat die Eigenschaft* Γ.

Beweis: Sei $\mathfrak{a}\mathfrak{c} \geqq \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c} \neq (0)$. Man multipliziere mit einem Ideal $\mathfrak{x}$, für welches $\mathfrak{c}\mathfrak{x} = (1)$ wird. Man erhält $\mathfrak{a} \geqq \mathfrak{b}$.

Die Eigenschaft Γ *besteht schon, wenn aus* $\mathfrak{a}\mathfrak{c} \geqq \mathfrak{c}$ *und* $\mathfrak{c} \neq (0)$ *folgt, daß* 1 *in* $\mathfrak{a}$ *enthalten ist.*

Beweis: Ist $\mathfrak{a}\mathfrak{c} \geqq \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ und ist $b \neq 0$ ein Element von $\mathfrak{b}$, so ist auch

$$\mathfrak{a}\mathfrak{c} \geqq (b) \cdot \mathfrak{c} \qquad \left(\frac{1}{b}\right) \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{c} \geqq \mathfrak{c}.$$

Nach der Voraussetzung ist also 1 im Ideal $\left(\frac{1}{b}\right) \cdot \mathfrak{a}$, folglich b im Ideal $\mathfrak{a}$ enthalten. Da dies für jedes Element b von $\mathfrak{b}$ gilt, folgt $\mathfrak{a} \geqq \mathfrak{b}$.

Die Eigenschaft Γ *besteht schon, wenn aus* $\mathfrak{a}\mathfrak{c} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ *und* $\mathfrak{c} \neq (0)$ *folgt, daß* $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ *ist.*

Beweis: Ist $\mathfrak{a}\mathfrak{c} \geqq \mathfrak{b}\mathfrak{c}$, so ist

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c} = (\mathfrak{a}\mathfrak{c}, \mathfrak{b}\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{c},$$

also

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}.$$

Das bedeutet aber: $\mathfrak{a} \geqq \mathfrak{b}$.

Eigenschaft Δ: *Ist* $(a) \cdot \mathfrak{c} \geqq (b) \cdot \mathfrak{c}$, *und* $\mathfrak{c} \neq (0)$, *so ist* b *durch* a *teilbar.*

Jeder Körper mit der Eigenschaft Γ *hat die Eigenschaft* Δ.

Beweis: Der Spezialfall von Γ mit $\mathfrak{a} = (a)$ und $\mathfrak{b} = (b)$ ist Δ.

Die Eigenschaft Δ *besteht schon, wenn aus* $\mathfrak{c} \geqq (r) \cdot \mathfrak{c}$ *und* $\mathfrak{c} \neq (0)$ *folgt, daß* r *ganz ist.*

Beweis: Aus $(a) \cdot \mathfrak{c} \geqq (b) \cdot \mathfrak{c}$ folgt $\mathfrak{c} \geqq \left(\frac{b}{a}\right) \cdot \mathfrak{c}$. Also ist $b : a$ ganz.

Bis jetzt war vorausgesetzt, daß ein System von Idealen fest gewählt war. Es sollen jetzt zwei Systeme von Idealen hinsichtlich der behandelten Eigenschaften verglichen werden. Der Körper $\mathfrak{K}$ und der in $\mathfrak{K}$ ausgewählte Ring $\mathfrak{G}$ der ganzen Elemente ist dabei aber in beiden Fällen derselbe.

Monotoniesatz: *Sind zwei Systeme von Idealen desselben Körpers so beschaffen, daß jedes Ideal des* 1. *Systems in dem von denselben Elementen erzeugten Ideal des* 2. *Systems als Untermenge enthalten ist, so gilt*:

Hat das 1. *System die Eigenschaft* A, *so hat auch das* 2. *System die Eigenschaft* A.
Hat das 1. *System die Eigenschaft* B, *so hat auch das* 2. *System die Eigenschaft* B.
Hat das 2. *System die Eigenschaft* Δ, *so hat auch das* 1. *System die Eigenschaft* Δ.

Daß für die Eigenschaft Γ keine Monotonie gilt, wird sich in § 7 zeigen.

Beweis: Kennzeichnet man die Ideale der beiden Systeme durch Indizes, so soll

$$(a_1, \ldots, a_n)_1 \leqq (a_1, \ldots, a_n)_2$$

sein. Es ist aber stets $(a)_1 = (a)_2$.

A. Ist

$$(a_1, \ldots, a_n)_1 = (d),$$

so sind die Elemente $a_1, \ldots, a_n$ durch d teilbar. Also ist

$$(a_1, \ldots, a_n)_2 \leqq (d).$$

Aus der Voraussetzung folgt, daß das Gleichheitszeichen gelten muß.

B. Man bestimme $x_1, \ldots, x_m$ so, daß

$$(a_1 x_1, \ldots, a_n x_m)_1 = (a_1, \ldots, a_n)_1 \cdot (x_1, \ldots, x_m)_1 = (1)$$

wird. Dann sind alle Produkte $a_i x_j$ ganz. Also ist

$$(a_1, \ldots, a_n)_2 \cdot (x_1, \ldots, x_m)_2 = (a_1 x_1, \ldots, a_n x_m)_2 \leqq (1).$$

Aus der Voraussetzung folgt, daß das Gleichheitszeichen gelten muß.

Δ. Sei

$$(r) \cdot (c_1, c_2, \ldots, c_n)_1 \leqq (c_1, c_2, \ldots, c_n)_1.$$

Dann ist jedes der Elemente rc_i in $(c_1, c_2, \ldots, c_n)_1$, also erst recht in $(c_1, c_2, \ldots, c_n)_2$ enthalten. Also ist

$$(r) \cdot (c_1, c_2, \ldots, c_n)_2 = (rc_1, rc_2, \ldots, rc_n)_2 \leqq (c_1, c_2, \ldots, c_n)_2$$

und, wenn das 2. Idealsystem die Eigenschaft Δ hat, r ganz.

§ 4. Die Dedekindsche Theorie.

In den Sätzen über vollständige Körper in § 1, mit Ausnahme der über die lineare Vollständigkeit, kommen nur rein multiplikative Begriffe vor. Auch in den Beweisen wird vom Vorhandensein der Addition kein Gebrauch gemacht. Man definiere:

Eine Menge $\mathfrak{M}$ *soll* ***multiplikativ-vollständig*** *heißen, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind*:

1. *Je zwei Elementen von* $\mathfrak{M}$ *ist ein Element von* $\mathfrak{M}$ *als Produkt zugeordnet. Die Multiplikation ist assoziativ und kommutativ.*

2. *Die Division, mit Ausnahme der durch ein Element* o, *ist stets eindeutig ausführbar. Für das Element* o *ist stets* $a \cdot o = o$.

3. *Gewisse Elemente von* $\mathfrak{M}$ *heißen ganz. Das Produkt ganzer Elemente ist ganz. Das Element* $a : a$ *ist ganz. Jedes Element von* $\mathfrak{M}$ *ist der Quotient zweier ganzer Elemente.*

4. *Je zwei Elemente von* $\mathfrak{M}$ *haben einen größten gemeinsamen Teiler* (*der wie in* § 1 *definiert wird*).

Die Sätze in § 1 gelten für jede multiplikativ-vollständige Menge. Es ist nun möglich, daß im Körper $\mathfrak{K}$ ein System $\mathfrak{M}$ von Idealen multiplikativ-vollständig ist, obwohl $\mathfrak{K}$ selbst nicht vollständig ist. Geht man dann von den Körperelementen zum Idealsystem $\mathfrak{M}$ über, so gewinnt man mit der Übersicht über die Teilbarkeitsverhältnisse der Ideale zugleich

die über die Elemente von $\mathfrak{K}$. Denn den Körperelementen entsprechen spezielle Ideale von $\mathfrak{M}$, die durch ein Element erzeugten Ideale, und zwar so, daß a dann und nur dann durch b teilbar ist, wenn (b) ein Teiler von (a) ist. Die Frage, wann dieser Übergang zu den Idealen zum Ziele führt, wird durch den Satz beantwortet:

Ein Idealsystem in einem Körper $\mathfrak{K}$ ist dann und nur dann multiplikativ-vollständig, wenn es die Eigenschaft B *hat.*

Beweis: Die Definitionsbedingung 1 der multiplikativen Vollständigkeit ist in jedem Idealsystem erfüllt. Für die Eindeutigkeit der Division ist Eigenschaft Γ, für ihre Ausführbarkeit Eigenschaft B notwendig und hinreichend. Bedingung 3 ist für jedes Idealsystem erfüllt, in dem 2 gilt. Bedingung 4 ist sicher erfüllt, wenn die Eigenschaft B vorhanden ist. Denn jeder gemeinsame Teiler der Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ muß $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ als Untermengen enthalten. Dann erhält er auch $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ und ist wegen der Eigenschaft B ein Teiler dieses Ideals. Das Ideal $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ ist aber wegen der Eigenschaft B selbst ein Teiler von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$.

Für die Gewinnung einer Übersicht über die Teilbarkeitsverhältnisse der Elemente von $\mathfrak{K}$ reicht es aus, daß ein Teil der Ideale eines Systems eine multiplikativ-vollständige Menge bildet. Nur müssen die durch ein Element erzeugten Ideale in $\mathfrak{M}$ enthalten sein. Doch führt dieser Fall zu nichts Neuem:

Ist eine Menge $\mathfrak{M}$ von Idealen eines Idealsystems multiplikativ-vollständig und gehören zu $\mathfrak{M}$ alle durch ein Element erzeugten Ideale, so bilden die Elemente von $\mathfrak{M}$ die sämtlichen Ideale eines neuen Idealsystems, das wieder multiplikativ-vollständig ist.

Beweis: I. Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Ideale aus $\mathfrak{M}$ und ist $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$, so ist $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{M}$ durch $\mathfrak{b}$ teilbar. Denn da die Menge $\mathfrak{M}$ multiplikativ-vollständig ist, gibt es in $\mathfrak{M}$ ein Ideal $\mathfrak{x}$, für welches $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{x}$ wird, und ein Ideal $\mathfrak{y}$, für welches $\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{y} = (1)$ wird. Dann ist

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{b}\mathfrak{y}\mathfrak{x} = \mathfrak{a}\mathfrak{y} \leqq (1).$$

II. In $\mathfrak{M}$ ist jedes Ideal größter gemeinsamer Teiler von Idealen, die durch ein Element erzeugt werden. Denn gehört $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ zu $\mathfrak{M}$, so ist nach I das Ideal $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ ein gemeinsamer Teiler der Ideale (a_i). Es ist der größte gemeinsame Teiler, weil jeder gemeinsame Teiler mit den Idealen (a_i) auch $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ als Untermenge enthalten muß, also nach I ein Teiler von $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ist.

III. Ordnet man jeder endlichen Menge $a_1, a_2, \ldots, a_n$ von Elementen des Körpers $\mathfrak{K}$ den größten gemeinsamen Teiler $(a_1, a_2, \ldots, a_n)^*$ der Ideale (a_i) in $\mathfrak{M}$ zu — er ist ein Ideal der Form $(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_1', a_2', \ldots, a_m')$ —, so bilden die Mengen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)^*$ ein System von Idealen. Denn die Bedingungen in § 2 sind erfüllt:

1. Die Elemente a_i gehören zu $(a_1, a_2, \ldots, a_n)^*$.

2. Sind $a_1, a_2, \ldots$ Elemente von $(b_1, b_2, \ldots)^*$, so sind die Ideale (a_i) Untermengen von

$$(b_1, b_2, \ldots)^* = (b_1, b_2, \ldots, b_1', b_2', \ldots).$$

Nach I ist also $(b_1, b_2, \ldots)^*$ in $\mathfrak{M}$ ein gemeinsamer Teiler der (a_i). Da $(a_1, a_2, \ldots)^*$ der größte gemeinsame Teiler ist, folgt:

$$(a_1, a_2, \ldots)^* \leqq (b_1, b_2, \ldots)^*.$$

3. Es ist $(a)^* = (a)$ zu setzen.

4. Ist

$$(a_1 b, a_2 b, \ldots)^* = (a_1 b, a_2 b, \ldots, c_1, c_2, \ldots),$$

so gehört das Ideal

$$\left(\frac{1}{b}\right) \cdot (a_1 b, a_2 b, \ldots, c_1, c_2, \ldots) = \left(a_1, a_2, \ldots, \frac{c_1}{b}, \frac{c_2}{b}, \ldots\right)$$

zu $\mathfrak{M}$. Dieses Ideal enthält die Ideale (a_i), also nach I auch das Ideal $(a_1, a_2, \ldots)^*$ als Untermenge. Ist a ein Element von $(a_1, a_2, \ldots)^*$, so ist daher $a \cdot b$ ein Element von $(a_1 b, a_2 b, \ldots)^*$.

5. Die Menge $(a, b)^*$ enthält die Menge (a, b), also auch das Element $a + b$.

IV. Das neue Idealsystem ist multiplikativ-vollständig. Zum Beweise hat man nur zu zeigen: Faßt man die Mengen

$$(a_1, a_2, \ldots)^* = (a_1, a_2, \ldots, a_1', a_2', \ldots)$$
$$(b_1, b_2, \ldots)^* = (b_1, b_2, \ldots, b_1', b_2', \ldots)$$

einmal als Ideale des alten Systems, dann als Ideale des neuen Systems auf und bildet ihre Produkte $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}^*$, so stimmen die Mengen $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}^*$ überein. Daß $\mathfrak{c} \leqq \mathfrak{c}^*$ ist, folgt daraus, daß $\mathfrak{c}^*$ jedes Produkt je eines Elementes beider Ideale, insbesondere also die Elemente $a_i b_j$ und $a_i' b_j$ und $a_i b_j'$ und $a_i' b_j'$ enthält, und daß weiter $\mathfrak{c}^*$, wie jedes Ideal des neuen Systems, auch ein Ideal des alten Systems ist. Daß $\mathfrak{c}^* \leqq \mathfrak{c}$ ist, folgt daraus, daß $\mathfrak{c}$ die Elemente $a_i b_j$ enthält und weiter nach Bedingung 1 der multiplikativen Vollständigkeit auch ein Ideal des neuen Systems ist.

§ 5. Linearformen.

In den folgenden Paragraphen sollen drei spezielle Systeme von Idealen untersucht werden. Ich beginne mit dem klassischen Idealsystem von Dedekind.

Sei $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ die Menge der Elemente des Körpers $\mathfrak{K}$, welche durch die Linearform

$$X_1 a_1 + X_2 a_2 + \cdots + X_n a_n$$

mit ganzen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dargestellt werden. Die Mengen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ bilden dann ein System von Idealen. Dieses soll das ***Idealsystem*** $\mathfrak{L}$ *heißen.*

Beweis: Man bestätigt die Bedingungen 1–5 in § 2.

Die Eigenschaften A usw. aus § 3 sollen, wenn sie sich auf das Idealsystem $\mathfrak{L}$ beziehen, mit $\mathfrak{L}$A usw. bezeichnet werden.

Die Körper mit der Eigenschaft $\mathfrak{L}$A *sind die linear-vollständigen Körper.*

Beweis: Dann und nur dann ist

$$(d) \geqq (a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

wenn d ein gemeinsamer Teiler von $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ist. Dann und nur dann ist im Idealsystem $\mathfrak{L}$

$$(d) \leqq (a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

wenn
$$d = X_1 a_1 + X_2 a_2 + \cdots + X_n a_n.$$

Die Eigenschaft $\mathfrak{L}$B kann auf äußerst mannigfaltige Art umgeformt werden:

1. *Hat $\mathfrak{K}$ die Eigenschaft* $\mathfrak{L}$B, *so können zu Elementen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ von $\mathfrak{K}$ stets Elemente $b_1, b_2, \ldots, b_n$ von $\mathfrak{K}$ so bestimmt werden, daß*

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = 1$$

wird und daß alle Produkte $a_i b_j$ ganz sind.

Beweis: Man bestimme das Ideal $(c_1, c_2, \ldots)$ so, daß

$$(a_1, a_2, \ldots) \cdot (c_1, c_2, \ldots) = (1)$$

wird. Dann sind alle Produkte $a_i c_j$ ganz, und es besteht eine Gleichung

$$(X_{11} c_1 + X_{12} c_2 + \cdots) \cdot a_1 + (X_{21} c_1 + X_{22} c_2 + \cdots) \cdot a_2 + \cdots = 1.$$

1*. *Gibt es in $\mathfrak{K}$ zu jedem Element r zwei solche ganze Elemente X, Y, daß Xr ganz und*

$$X + Yr = 1$$

ist, so hat $\mathfrak{K}$ die Eigenschaft $\mathfrak{L}$B.

Beweis: Zu jedem Ideal $(a, b) \neq (0)$ läßt sich ein Ideal $\mathfrak{x}$ so bestimmen, daß $(a, b) \cdot \mathfrak{x} = (1)$ wird. Denn ist etwa $a \neq 0$, so setze man $r = b : a$ und bestimme zu r die Elemente X, Y. Da dann

$$(1, r) \cdot (X, Y) = (1)$$

wird, braucht man nur

$$\mathfrak{x} = (X : a, Y : a)$$

zu setzen.

2. *Hat $\mathfrak{R}$ die Eigenschaft* $\mathfrak{L}\mathsf{B}$, *so ist jedes endliche Kongruenzensystem*

$$x \equiv r \pmod{a} \qquad x \equiv s \pmod{b} \qquad x \equiv t \pmod{c} \qquad \ldots$$

lösbar, wenn jedes Paar dieser Kongruenzen eine gemeinsame Lösung hat.

Beweis: Da der Satz für ein System von zwei Kongruenzen selbstverständlich ist, kann der Beweis durch vollständige Induktion erbracht werden. Sei e eine Lösung aller Kongruenzen mit Ausnahme der ersten, f eine Lösung aller Kongruenzen mit Ausnahme der zweiten und g eine gemeinsame Lösung der ersten und zweiten Kongruenz. Dann ist

$$\begin{array}{llll} r \equiv & f \equiv g & \pmod{a} \\ s \equiv e \equiv & g & \pmod{b} \\ t \equiv e \equiv f & & \pmod{c} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \end{array}$$

Ist $e = g$, so ist nichts mehr zu beweisen. Sonst bestimme man u, v so, daß

$$(e - g) \cdot u + (f - g) \cdot v = 1$$

wird und daß

$$\begin{array}{ll} (e - g) \cdot u & (e - g) \cdot v \\ (f - g) \cdot u & (f - g) \cdot v, \\ (e - f) \cdot u & (e - f) \cdot v \end{array}$$

also auch

ganz sind. Dann genügt

$$x = (f - e)(e - g)u + e = (e - f)(f - g)v + f$$

den Kongruenzen

$$x \equiv f \pmod{f - g} \qquad x \equiv e \pmod{e - g} \qquad x \equiv e \pmod{e - f},$$

also erst recht den gegebenen Kongruenzen.

2*. *Ist in $\mathfrak{R}$ jedes Kongruenzensystem*

$$x \equiv 0 \pmod{1} \qquad x \equiv 0 \pmod{r} \qquad x \equiv 1 \pmod{1 - r}$$

lösbar, so hat $\mathfrak{R}$ die Eigenschaft $\mathfrak{L}\mathsf{B}$.

Beweis: Ist, bei gegebenem $r \neq 0$ und $r \neq 1$, x eine Lösung des Kongruenzensystems, so setze man

$$X = \frac{1 - x}{1 - r} \qquad Y = \frac{x - r}{r \cdot (1 - r)} = \frac{x}{r} + \frac{x - 1}{1 - r}.$$

Dann sind X, Y und

$$Xr = \frac{1 - x}{1 - r} + x - 1$$

ganz. Es ist weiter

$$X + Yr = 1.$$

Daraus folgt die Behauptung nach 1*.

3. *Hat $\mathfrak{R}$ die Eigenschaft* $\mathfrak{L}\mathsf{B}$, *so läßt sich jedes Element des Ideals (a, b) in der Form*

$$Z \cdot (a + b) + \textit{gemeinsames Vielfaches von } a, b$$

mit ganzem Z darstellen.

Beweis: Jedes Paar der Kongruenzen

$$\begin{aligned} x &\equiv 0 && \pmod{a} \\ x &\equiv 0 && \pmod{b} \\ x &\equiv Xa + Yb && \pmod{a + b} \end{aligned}$$

hat eine gemeinsame Lösung. Folglich hat das ganze System eine Lösung x. Aus den beiden ersten Kongruenzen folgt, daß x ein gemeinsames Vielfaches von a und b ist. Die dritte Kongruenz liefert

$$Xa + Yb = Z(a + b) + x.$$

3*. *Gibt es in jedem Ideal (a, b) ein solches Element c, daß*

$$\begin{aligned} a &= Uc + \textit{gemeinsames Vielfaches von } a, b \\ b &= Vc + \textit{gemeinsames Vielfaches von } a, b, \end{aligned}$$

so hat $\mathfrak{R}$ die Eigenschaft $\mathfrak{SB}$.

Beweis: Es ist

$$Ub = Va + \text{gemeinsames Vielfaches von } a, b.$$

Ist ferner

$$c = Aa + Bb,$$

so ist

$$a - UAa = UBb + \text{gemeinsames Vielfaches von } a, b.$$

Also ist

$$x = a + UA(b - a)$$

eine Lösung des Kongruenzensystems

$$x \equiv 0 \pmod{a} \qquad x \equiv 0 \pmod{b} \qquad x \equiv a \pmod{a - b}.$$

Daraus folgt die Behauptung nach 2*.

4. *Hat $\mathfrak{R}$ die Eigenschaft $\mathfrak{SB}$, so ist jedes Vielfache aller gemeinsamen Teiler von $a_1, a_2, \ldots, a_n$ im Ideal $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ enthalten.*

Beweis: Man bestimme $b_1, b_2, \ldots, b_n$ so, daß alle $a_i b_j$ ganz sind und

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = 1$$

wird. Ist

$$m = b_1 m \cdot a_1 + b_2 m \cdot a_2 + \cdots + b_n m \cdot a_n$$

ein Vielfaches aller gemeinsamen Teiler von $a_1, a_2, \ldots, a_n$, so ist m insbesondere ein Vielfaches von $1 : b_j$, also $b_j m$ ganz.

5. *Hat $\mathfrak{R}$ die Eigenschaft $\mathfrak{SB}$, so ist jedes Potenzprodukt*

$$a_1^{\varkappa_1} a_1^{\varkappa_2} \ldots a_n^{\varkappa_n} \quad \textit{mit} \quad \varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_n = k$$

in der Form

$$X_1 a_1^k + X_2 a_2^k + \cdots + X_n a_n^k$$

mit ganzen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ darstellbar.

Beweis: Sei d ein gemeinsamer Teiler von $a_1^k, a_2^k, \ldots, a_n^k$. Dann ist, wenn

$$b = a_1^{\varkappa_1} a_2^{\varkappa_2} \ldots a_n^{\varkappa_n} \qquad (\varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_n = k)$$

gesetzt wird, b^k durch d^k teilbar, also

$$(b) \cdot (b^{k-1}, b^{k-2} d, \ldots, d^{k-1}) = (b^k, b^{k-1} d, \ldots, b d^{k-1})$$
$$\leqq (b^{k-1} d, b^{k-2} d^2, \ldots, d^k) = (d) \cdot (b^{k-1}, b^{k-2} d, \ldots, d^{k-1}).$$

Da $\mathfrak{R}$ mit B auch die Eigenschaft Δ besitzt, folgt die Teilbarkeit von b durch d. Dies gilt für jeden gemeinsamen Teiler von $a_1^k, a_2^k, \ldots, a_n^k$. Nach 4 gehört also b zum Ideal $(a_1^k, a_2^k, \ldots, a_n^k)$.

5*. *Ist bei beliebigem r die Gleichung*

$$r = X + Yr^2$$

stets durch ganze X, Y lösbar und hat $\mathfrak{R}$ die Eigenschaft $\mathfrak{L}\Delta$, so hat $\mathfrak{R}$ die Eigenschaft $\mathfrak{L}\mathsf{B}$.

Beweis: Aus

$$(X) \cdot (1, r) = (X, Xr) = (r - Yr^2, Xr) \leqq (r, r^2) = (r) \cdot (1, r)$$

und $\mathfrak{L}\Delta$ folgt, daß $X : r$ ganz ist. Wegen

$$1 = \frac{X}{r} + Yr$$

ist dann auch Yr ganz. Daraus folgt

$$(1, r) \cdot (X : r, Y) = (1).$$

4*. *Ist bei beliebigem r jedes Vielfache aller gemeinsamen Teiler von 1 und r im Ideal $(1, r)$ enthalten und hat $\mathfrak{R}$ die Eigenschaft $\mathfrak{L}\Delta$, so hat $\mathfrak{R}$ die Eigenschaft $\mathfrak{L}\mathsf{B}$.*

Beweis: Ist $1 : C$ ein gemeinsamer Teiler von 1 und r^2, so ist

$$(Cr) \cdot (1, r) = (Cr, Cr^2) \leqq (r, 1).$$

Nach $\mathfrak{L}\Delta$ ist also r durch $1 : C$ teilbar. Dies gilt für jeden gemeinsamen Teiler $1 : C$ von 1 und r^2. Nach der Voraussetzung besteht daher eine Gleichung

$$r = X + Yr^2.$$

Daraus folgt nach 5* die Eigenschaft $\mathfrak{L}\mathsf{B}$.

Ob die Sätze 4* und 5* auch ohne Voraussetzung der Eigenschaft $\mathfrak{L}\Delta$ gelten, weiß ich nicht.

Jeder Körper mit der Eigenschaft $\mathfrak{L}\Gamma$ hat die Eigenschaft $\mathfrak{L}\mathsf{B}$.

Beweis: Für jedes Element r von $\mathfrak{R}$ ist

$$(r) \cdot (1, r) = (r, r^2) \leqq (1, r, r^2, r^3) = (1, r^2) \cdot (1, r).$$

Hat $\mathfrak{R}$ die Eigenschaft Γ, so ist also r in $(1, r^2)$ enthalten; es besteht also eine Gleichung

$$r = X + Yr^2.$$

Daraus folgt nach 5* die Eigenschaft B.

Der Körper $\mathfrak{R}$ hat dann und nur dann die Eigenschaft $\mathfrak{L}\Delta$, wenn jedes Element r, das einer Gleichung

$$r^n + C_1 r^{n-1} + \cdots + C_n = 0$$

mit ganzen Koeffizienten genügt, ganz ist.

Beweis: I. Hat $\mathfrak{R}$ die Eigenschaft $\mathfrak{L}\Delta$ und genügt r der angegebenen Gleichung, so ist

$$(r) \cdot (1, r, \ldots, r^{n-2}, r^{n-1}) = (r, r^2, \ldots, r^{n-1}, -C_1 r^{n-1} - \cdots - C_n) \leqq (1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}),$$

also r ganz.

II. Eine Gleichung der angegebenen Form habe nur ganze Lösungen. Ist dann

$$(r) \cdot (a_1, a_2, \ldots) \leqq (a_1, a_2, \ldots) \neq (0),$$

so bestehen Gleichungen

$$ra_1 = X_{11}a_1 + X_{12}a_2 + \cdots$$
$$ra_2 = X_{21}a_1 + X_{22}a_2 + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Daraus folgt:

$$\begin{vmatrix} X_{11}-r & X_{12} & \cdots \\ X_{21} & X_{22}-r & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0.$$

Also ist r ganz, und $\mathfrak{R}$ hat die Eigenschaft $\mathfrak{L}\Delta$.

Die Körper mit der Eigenschaft $\mathfrak{L}\Delta$ haben, wie sich zeigen wird, nicht immer die Eigenschaft $\mathfrak{L}\mathsf{B}$. Die Eigenschaft $\mathfrak{L}\Delta$ ist die schwächste der Eigenschaften, von denen in dieser Arbeit die Rede ist. Aus der Definitionsbedingung 5 der Ideale in § 2 ergibt sich nämlich, daß in jedem Idealsystem das Ideal $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ alle Elemente

$$X_1a_1 + X_2a_2 + \cdots + X_na_n$$

umfassen muß. Nach dem Monotoniesatz hat also jeder Körper, der in bezug auf irgendein Idealsystem die Eigenschaft Δ hat, auch die Eigenschaft $\mathfrak{L}\Delta$. Erst recht hat ein Körper, der eine Eigenschaft A oder B oder Γ besitzt, die Eigenschaft $\mathfrak{L}\Delta$. Ein Beispiel für einen Körper $\mathfrak{R}$, der nicht die Eigenschaft $\mathfrak{L}\Delta$ hat, liefern die gewöhnlichen komplexen Zahlen $a + bi$ mit rationalen a, b, wenn $\mathfrak{G}$ der Ring der Zahlen $A + 2Bi$ mit ganzen A und B ist; denn i ist nicht ganz, wohl aber $i^2 = -1$. Die Eigenschaft $\mathfrak{L}\Delta$ spielt seit den klassischen Arbeiten von Dedekind und Kronecker eine große Rolle. Man hat ihr einen besonderen Namen gegeben:

Ein Körper mit der Eigenschaft $\mathfrak{L}\Delta$ heißt ***ganz-abgeschlossen.***

§ 6. Algebraisch darstellbare Elemente.

Es soll jetzt ein zweites Beispiel für ein System von Idealen behandelt werden. In die Definition dieses Idealsystems gehen die Ideale des Systems $\mathfrak{L}$ ein. Um Verwechslungen zu vermeiden, sollen diese Ideale in diesem Paragraphen durch Beifügung des Index $\mathfrak{L}$ gekennzeichnet werden. Das neu zu definierende Ideal $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ist sicher eine Obermenge von $(a_1, a_2, \ldots, a_n)_\mathfrak{L}$. Die neue Eigenschaft Δ hat die Eigenschaft $\mathfrak{L}\Delta$ zur Folge. Es interessieren deshalb nur ganz-abgeschlossene Körper. Die Definition des neuen Idealsystems soll von vorn herein nur für diese Körper gegeben werden, da sie sonst komplizierter gefaßt werden müßte.

Sei $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ die Menge der Elemente r des Körpers $\mathfrak{R}$, für welche es ein solches Ideal $\mathfrak{x}_\mathfrak{L} \neq (0)_\mathfrak{L}$ des Systems $\mathfrak{L}$ gibt, daß

$$(r)_\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{x}_\mathfrak{L} \leqq (a_1, a_2, \ldots, a_n)_\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{x}_\mathfrak{L}$$

wird. Ist $\mathfrak{R}$ ganz-abgeschlossen, so bilden die Mengen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ein System von Idealen. Dieses soll das ***Idealsystem*** $\mathfrak{A}$ *heißen.*

Dem Beweis werde vorausgeschickt:

Hilfssatz: *Sind $a_1, a_2, \ldots$ in $(b_1, b_2, \ldots)$ enthalten, so gibt es ein Ideal $\mathfrak{x}_\mathfrak{L} \neq (0)_\mathfrak{L}$ des Systems $\mathfrak{L}$, für welches*

$$(a_1, a_2, \ldots)_\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{x}_\mathfrak{L} \leqq (b_1, b_2, \ldots)_\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{x}_\mathfrak{L}$$

wird.

Beweis: Da $a_1, a_2, \ldots$ Elemente von $(b_1, b_2, \ldots)$ sind, lassen sich $\mathfrak{x}'_\mathfrak{L}, \mathfrak{x}''_\mathfrak{L}, \ldots$ so bestimmen, daß

$$(a_1)_\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{x}'_\mathfrak{L} \leqq (b_1, b_2, \ldots)_\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{x}'_\mathfrak{L} \qquad \mathfrak{x}'_\mathfrak{L} \neq (0)_\mathfrak{L}$$
$$(a_2)_\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{x}''_\mathfrak{L} \leqq (b_1, b_2, \ldots)_\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{x}''_\mathfrak{L} \qquad \mathfrak{x}''_\mathfrak{L} \neq (0)_\mathfrak{L}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

wird. Setzt man $\mathfrak{x}_\mathfrak{L} = \mathfrak{x}'_\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{x}''_\mathfrak{L} \ldots$, so ist für jedes i

$$(a_i)_\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{x}_\mathfrak{L} \leqq (b_1, b_2, \ldots)_\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{x}_\mathfrak{L} \qquad \mathfrak{x}_\mathfrak{L} \neq (0)_\mathfrak{L}.$$

Daraus folgt

$$(a_1, a_2, \ldots)_\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{x}_\mathfrak{L} \leqq (b_1, b_2, \ldots)_\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{x}_\mathfrak{L}.$$

Beweis des Hauptsatzes: Die Bedingungen 1–5 in § 2 sind erfüllt:

1. Es ist $(a_i)_\mathfrak{L} \leqq (a_1, a_2, \ldots)_\mathfrak{L}$.

2. Sind $a_1, a_2, \ldots$ in $(b_1, b_2, \ldots)$ enthalten, so bestimme man $\mathfrak{x}_\mathfrak{L} \neq (0)_\mathfrak{L}$ so, daß

$$(a_1, a_2, \ldots)_\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{x}_\mathfrak{L} \leqq (b_1, b_2, \ldots)_\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{x}_\mathfrak{L}$$

wird. Gehört r der Menge $(a_1, a_2, \ldots)$ an, so ist für ein Ideal $\mathfrak{y}_\mathfrak{L} \neq (0)_\mathfrak{L}$

$$(r)_\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{y}_\mathfrak{L} \leqq (a_1, a_2, \ldots)_\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{y}_\mathfrak{L},$$

also

$$(r)_\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{x}_\mathfrak{L}\, \mathfrak{y}_\mathfrak{L} \leqq (b_1, b_2, \ldots)_\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{x}_\mathfrak{L}\, \mathfrak{y}_\mathfrak{L}.$$

Demnach gehört r der Menge $(b_1, b_2, \ldots)$ an.

3. Die Ungleichung

$$(r)_\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{x}_\mathfrak{L} \leqq (a)_\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{x}_\mathfrak{L} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{x}_\mathfrak{L} \neq (0)_\mathfrak{L}$$

ist wegen $\mathfrak{L}\Delta$ dann und nur dann erfüllt, wenn r ein Vielfaches von a ist.

4. Aus

$$(r)_\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{x}_\mathfrak{L} \leqq (a_1, a_2, \ldots)_\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{x}_\mathfrak{L}$$

folgt

$$(rb)_\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{x}_\mathfrak{L} \leqq (a_1 b, a_2 b, \ldots)_\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{x}_\mathfrak{L}.$$

5. Wegen $(a + b)_\mathfrak{L} \leqq (a, b)_\mathfrak{L}$ gehört $a + b$ zur Menge (a, b).

Das Idealsystem $\mathfrak{A}$ kann auch direkt, ohne Benutzung des Idealsystems $\mathfrak{L}$, definiert werden:

Dann und nur dann gehört das Element r von $\mathfrak{R}$ zum Ideal $(a_1, a_2, \ldots)$ des Systems $\mathfrak{A}$, wenn r einer Gleichung

$$r^k + f_1(a_1, a_2, \ldots) \cdot r^{k-1} + \cdots + f_k(a_1, a_2, \ldots) = 0$$

genügt, in der $f_i\,(a_1, a_2, \ldots)$ ein homogenes Polynom vom Grade i in $a_1, a_2, \ldots$ mit ganzen Koeffizienten ist.

Beweis: I. Für das Element r von $\mathfrak{R}$ bestehe eine Gleichung der angegebenen Art. Sei

$$\mathfrak{b}_\mathfrak{L} = (\ldots, r^\lambda a_1^{\varkappa_1} a_2^{\varkappa_2} \ldots, \ldots)_\mathfrak{L} \qquad (\lambda + \varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots = k - 1)$$

das von allen Produkten von $k - 1$ Faktoren $r, a_1, a_2, \ldots$ erzeugte Ideal des Systems $\mathfrak{L}$. Dann ist $(r)_\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{b}_\mathfrak{L}$ in dem von den Potenzprodukten $r^\lambda a_1^{\varkappa_1} a_2^{\varkappa_2} \ldots$ der Dimension k erzeugten Ideal $\mathfrak{c}_\mathfrak{L}$ enthalten. Es ist aber

$$\mathfrak{c}_\mathfrak{L} = (a_1, a_2, \ldots)_\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{b}_\mathfrak{L}.$$

Denn durch Multiplikation der erzeugenden Elemente von $(a_1, a_2, \ldots)_\mathfrak{L}$ mit denen von $\mathfrak{b}_\mathfrak{L}$ erhält man alle erzeugenden Elemente von $\mathfrak{c}_\mathfrak{L}$ mit Ausnahme von r^k. Dieses Element ist aber wegen der vorausgesetzten Gleichung in $(a_1, a_2, \ldots)_\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{b}_\mathfrak{L}$ enthalten. Es ist also

$$(r)_\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{b}_\mathfrak{L} \leqq (a_1, a_2, \ldots)_\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{b}_\mathfrak{L}.$$

Da $\mathfrak{b}_\mathfrak{L}$ die Elemente $a_1^{k-1}, a_2^{k-1}, \ldots$ enthält, ist $\mathfrak{b}_\mathfrak{L} \neq (0)_\mathfrak{L}$, wenn $(a_1, a_2, \ldots)_\mathfrak{L} \neq (0)_\mathfrak{L}$ ist. Daraus folgt, daß r zu $(a_1, a_2, \ldots)$ gehört.

II. Das Element r gehöre zu $(a_1, a_2, \ldots)$. Dann besteht für Elemente $x_1, x_2, \ldots$, die nicht sämtlich gleich 0 sind, eine Ungleichung

$$(r)_{\mathfrak{L}} \cdot (x_1, x_2, \ldots)_{\mathfrak{L}} \leqq (a_1, a_2, \ldots)_{\mathfrak{L}} \cdot (x_1, x_2, \ldots)_{\mathfrak{L}} .$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} r x_1 &= l_{11} x_1 + l_{12} x_2 + \cdots \\ r x_2 &= l_{21} x_1 + l_{22} x_2 + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

wo die l_{ij} homogene Linearformen in $a_1, a_2, \ldots$ mit ganzen Koeffizienten sind. Daraus erhält man aber

$$\begin{vmatrix} l_{11} - r & l_{12} & \cdots \\ l_{21} & l_{22} - r & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist eine Gleichung der gesuchten Art.

Der Beweis liefert zugleich den Satz:

In einem beliebigen Körper $\mathfrak{R}$ möge das Element r der Gleichung

$$x^k + f_1(a_1, a_2, \ldots) \cdot x^{k-1} + \cdots + f_k(a_1, a_2, \ldots) = 0$$

genügen, in der $f_i(a_1, a_2, \ldots)$ ein homogenes Polynom vom Grade i in $a_1, a_2, \ldots$ mit ganzen Koeffizienten ist. Dann genügt r auch einer Gleichung

$$\begin{vmatrix} l_{11} + x & l_{12} & \cdots \\ l_{21} & l_{22} + x & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0,$$

in der die l_{ij} homogene Linearformen in $a_1, a_2, \ldots$ mit ganzen Koeffizienten sind. Die Anzahl der Reihen der Determinante ist dabei im allgemeinen größer als k.

Für diesen Satz möge hier noch ein zweiter Beweis mitgeteilt worden, der von der Idealtheorie keinen Gebrauch macht. In ihm wird die gesuchte Determinante direkt aus den Koeffizienten der gegebenen Gleichung aufgebaut.

Beweis: I. Man zerlege f_i so im Summanden, daß jeder Summand ein Produkt von Linearformen in $a_1, a_2, \ldots$ mit ganzen Koeffizienten ist. Das kann z. B. dadurch geschehen, daß man f_i als Summe von, mit ganzen Elementen multiplizierten, Potenzprodukten $a_1^{x_1} \cdot a_2^{x_2} \cdots$ darstellt. Seien $g_1, g_2, \ldots$ die sämtlichen Summanden, in die $f_1, f_2, \ldots, f_k$ zerlegt sind, in irgendeiner Anordnung. Ist

$$g = l_1 \cdot l_2 \cdots l_s,$$

wo $l_1, l_2, \ldots, l_s$ homogene Linearformen in $a_1, a_2, \ldots$ mit ganzen Koeffizienten sind, so stelle man g in der Determinantenform dar:

$$g = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \pm l_1 \\ l_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & l_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & l_{s-1} & 0 \end{vmatrix}.$$

Für $s = 1$ reduziert sich die Darstellung auf $g = l_1$.

II. Man setze jetzt eine Matrix

$$\mathfrak{P} = \begin{pmatrix} \mathfrak{P}_{11} & \mathfrak{P}_{12} & \cdots \\ \mathfrak{P}_{21} & \mathfrak{P}_{22} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

aus Teilmatrizen $\mathfrak{P}_{ij}$ zusammen. Dabei sollen $\mathfrak{P}_{11}$, $\mathfrak{P}_{22}$, ... die Matrizen der $g_1, g_2, \ldots$ darstellenden Determinanten sein. Für $i \neq j$ soll das letzte Element der 1. Zeile von $\mathfrak{P}_{ij}$ mit dem letzten Element der 1. Zeile von $\mathfrak{P}_{ii}$ übereinstimmen. Sonst soll die Matrix $\mathfrak{P}_{ij}$ nur Nullen enthalten. Dann sind die $|\mathfrak{P}_{ii}|$ die einzigen von 0 verschiedenen Hauptunterdeterminanten von $\mathfrak{P}$. Denn sei $\mathfrak{Q}$ eine zur Hauptdiagonale symmetrisch liegende Teilmatrix, deren Determinante nicht gleich 0 ist. Dann muß in der 1. Zeile von $\mathfrak{Q}$ ein von 0 verschiedenes Element stehen. Diese Zeile muß daher für ein gewisses i die 1. Zeile von $\mathfrak{P}_{ii}$ sein. Die 1. Spalte von $\mathfrak{P}_{ii}$ ist dann die 1. Spalte von $\mathfrak{Q}$. Da in der 1. Spalte von $\mathfrak{Q}$ ein von 0 verschiedenes Element stehen muß, muß, wenn $\mathfrak{P}_{ii}$ nicht einreihig ist, die 2. Zeile von $\mathfrak{P}_{ii}$ zu $\mathfrak{Q}$ gehören. Die 2. Spalte von $\mathfrak{P}_{ii}$ ist dann die 2. Spalte von $\mathfrak{Q}$. Usw. Es ergibt sich, daß alle Zeilen und Spalten von $\mathfrak{P}_{ii}$ zu $\mathfrak{Q}$ gehören müssen. Damit sind aber die Zeilen und Spalten von $\mathfrak{Q}$ erschöpft. Denn sonst müßte die erste weitere Zeile ein von 0 verschiedenes Element enthalten, und zwar entweder in einer Spalte, die zu $\mathfrak{P}_{ii}$ gehört, oder auf oder hinter der Hauptdiagonale von $\mathfrak{P}$. Es käme also nur die 1. Zeile eines $\mathfrak{P}_{jj}$ mit $j > i$ in Betracht. Dann enthielte $\mathfrak{Q}$ aber zwei proportionale Zeilen und hätte die Determinante 0.

III. Die von 0 verschiedenen Hauptunterdeterminanten von $\mathfrak{P}$ haben nach I und II die Werte $g_1, g_2, \ldots$. Die Summe der 1-, 2-, ... reihigen Hauptunterdeterminanten ist gleich

$$f_1, f_2, \ldots, f_k, 0, 0, \ldots$$

Addiert man zu den Elementen der Hauptdiagonale von $\mathfrak{P}$ überall x, so entsteht eine Matrix, deren Determinante gleich

$$x^m + f_1 x^{m-1} + \cdots + f_k x^{m-k} + 0 \cdot x^{m-k-1} + \cdots$$

ist. Diese Determinante verschwindet also für $x = r$.

Es sollen jetzt für das Idealsystem $\mathfrak{A}$ die Eigenschaften A, B, Γ, Δ untersucht werden. Sie sollen wieder mit $\mathfrak{A}$A usw. bezeichnet werden.

Die Eigenschaften $\mathfrak{A}$A *und* $\mathfrak{L}$A *sind gleichwertig.*

Beweis: I. Ein Körper mit der Eigenschaft $\mathfrak{L}$A hat nach dem Monotoniesatz auch die Eigenschaft $\mathfrak{A}$A.

II. Hat $\mathfrak{R}$ die Eigenschaft $\mathfrak{A}$A, so gibt es zu den Elementen $a_1, a_2, \ldots$ von $\mathfrak{R}$ ein solches Element d, daß

$$(a_1, a_2, \ldots) = (d)$$

wird. Dann sind $a_1, a_2, \ldots$ Vielfache von d. Weiter besteht eine Gleichung

$$d^k + f_1(a_1, a_2, \ldots) \cdot d^{k-1} + \cdots + f_k(a_1, a_2, \ldots) = 0,$$

in der f_i wieder ein homogenes Polynom vom Grade i in $a_1, a_2, \ldots$ mit ganzen Koeffizienten ist. Man schreibe f_i als Linearform in $a_1, a_2, \ldots$, deren Koeffizienten homogene Polynome vom Grade $i-1$ in $a_1, a_2, \ldots$ sind. Diese Koeffizienten sind jedenfalls Vielfache von d^{i-1}. Die Gleichung läßt sich also in der Form

$$d^k + (C_1 a_1 + C_2 a_2 + \cdots) \cdot d^{k-1} = 0$$

schreiben. Daraus folgt, daß für den gemeinsamen Teiler d von $a_1, a_2, \ldots$ die Gleichung

$$d = -C_1 a_1 - C_2 a_2 - \cdots$$

besteht. Also hat $\mathfrak{R}$ die Eigenschaft $\mathfrak{L}$A.

Die Eigenschaften $\mathfrak{A}$B *und* $\mathfrak{L}$B *sind gleichwertig.*

Beweis: I. Ein Körper mit der Eigenschaft $\mathfrak{Q}\mathsf{B}$ hat nach dem Monotoniesatz auch die Eigenschaft $\mathfrak{A}\mathsf{B}$.

II. Hat $\mathfrak{K}$ die Eigenschaft $\mathfrak{A}\mathsf{B}$, so gibt es zu den Elementen $a_1, a_2, \ldots$ von $\mathfrak{K}$ solche Elemente $x_1, x_2, \ldots$, daß

$$(a_1, a_2, \ldots) \cdot (x_1, x_2, \ldots) = (1)$$

wird. Dann sind die Elemente $a_i x_j$ ganz. Weiter besteht eine Gleichung

$$1 + f_1 \cdot 1 + \cdots + f_k = 0,$$

in der f_r ein homogenes Polynom r-ten Grades in den $a_i x_j$ mit ganzen Koeffizienten, also auch eine Linearform in den $a_i x_j$ mit ganzen Koeffizienten ist. Die Gleichung läßt sich also in der Form

$$1 = C_{11} a_1 x_1 + C_{12} a_1 x_2 + \cdots$$

schreiben. Daraus folgt

$$(a_1, a_2, \ldots)_{\mathfrak{Z}} \cdot (x_1, x_2, \ldots)_{\mathfrak{Z}} = (1).$$

Also hat $\mathfrak{K}$ die Eigenschaft $\mathfrak{Q}\mathsf{B}$.

Jeder Körper mit der Eigenschaft $\mathfrak{Q}\Delta$ *hat die Eigenschaft* $\mathfrak{A}\Gamma$.

Beweis: Ist

$$(c_1, c_2, \ldots) \leqq (a_1, a_2, \ldots) \cdot (c_1, c_2, \ldots),$$

so gibt es nach dem zu Beginn des Paragraphen bewiesenen Hilfssatz ein Ideal $\mathfrak{x}_{\mathfrak{Z}} \neq (0)$, für welches

$$(c_1, c_2, \ldots)_{\mathfrak{Z}} \cdot \mathfrak{x}_{\mathfrak{Z}} \leqq (\ldots, a_i c_j, \ldots)_{\mathfrak{Z}} \cdot \mathfrak{x}_{\mathfrak{Z}}$$

wird. Sind $c_1, c_2, \ldots$ nicht sämtlich gleich 0, so ist

$$(c_1, c_2, \ldots)_{\mathfrak{Z}} \cdot \mathfrak{x}_{\mathfrak{Z}} = \mathfrak{y}_{\mathfrak{Z}} \neq (0)$$

und

$$(1) \cdot \mathfrak{y}_{\mathfrak{Z}} \leqq (a_1, a_2, \ldots)_{\mathfrak{Z}} \cdot \mathfrak{y}_{\mathfrak{Z}}.$$

Daraus folgt, daß das Element 1 im Ideal $(a_1, a_2, \ldots)$ enthalten ist.

Man beachte, daß $\mathfrak{A}\Gamma$ nicht mit $\mathfrak{Q}\Gamma$ gleichwertig ist.

Jeder Körper mit der Eigenschaft $\mathfrak{Q}\Delta$ *hat die Eigenschaft* $\mathfrak{A}\Delta$.

Beweis: Der Körper hat die Eigenschaft $\mathfrak{A}\Gamma$.

§ 7. Die Vielfachen der gemeinsamen Teiler.

Im dritten und letzten Beispiel für den Idealbegriff sollen die Mengen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ so groß wie möglich gewählt werden.

Sei $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *die Menge der Elemente des Körpers* $\mathfrak{K}$, *welche Vielfache aller gemeinsamen Teiler von* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *sind. Die Mengen* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *bilden dann ein System von Idealen. Dieses soll das* ***Idealsystem*** $\mathfrak{V}$ *heißen* *).

Beweis: Die Bedingungen 1—5 in § 2 sind erfüllt:

1. Jedes a_i ist ein Vielfaches jedes gemeinsamen Teilers von $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

2. Sei d ein gemeinsamer Teiler von $b_1, b_2, \ldots$. Dann ist, wenn $a_1, a_2, \ldots$ in $(b_1, b_2, \ldots)$ enthalten sind, jedes a_i durch d teilbar. Also ist jedes Element von $(a_1, a_2, \ldots)$ ein Vielfaches von d. Da d ein beliebiger gemeinsamer Teiler von $b_1, b_2, \ldots$ war, besteht $(a_1, a_2, \ldots)$ nur aus Vielfachen aller gemeinsamen Teiler von $b_1, b_2, \ldots$.

---

*) Zusatz bei der Korrektur: Im 2. Bande von B. L. van der Waerden, Moderne Algebra (1931), wird dieses Idealsystem in § 103 nach nicht veröffentlichen Untersuchungen von Herrn E. Artin behandelt. Dort wird auch der erste der beiden Sätze des § 8 bewiesen.

3. Die Vielfachen aller Teiler von a sind die Vielfachen von a.

4. Sei d ein gemeinsamer Teiler von $a_1 b$, $a_2 b$, ... Dann ist $d : b$ ein gemeinsamer Teiler von $a_1, a_2, \ldots$. Ist a in $(a_1, a_2, \ldots)$ enthalten, so ist daher a durch $d : b$, also $a \cdot b$ durch d teilbar.

5. Das Element $a + b$ ist durch jeden gemeinsamen Teiler von a und b teilbar.

Das Ideal $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ in irgendeinem Idealsystem ist eine Untermenge des Ideals $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ im Idealsystem $\mathfrak{V}$.

Beweis: Ist d ein gemeinsamer Teiler von $a_1, a_2, \ldots, a_n$, so ist in jedem Idealsystem nach Bedingung 2 und 3 in § 2

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leqq (d).$$

Also kann $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ nur Vielfache von d enthalten.

Die Eigenschaften A usw. sollen, wenn sie sich auf das Idealsystem $\mathfrak{V}$ beziehen, mit $\mathfrak{V}$A usw. bezeichnet werden.

Die Körper mit der Eigenschaft $\mathfrak{V}$A sind die vollständigen Körper.

Nach dem Monotoniesatz ist also jeder Körper, der in irgendeinem Idealsystem die Eigenschaft A hat, vollständig.

Beweis: Dann und nur dann ist

$$(d) \geqq (a_1, a_2, \ldots),$$

wenn d ein gemeinsamer Teiler von $a_1, a_2, \ldots$ ist. Dann und nur dann ist im Idealsystem $\mathfrak{V}$

$$(d) \leqq (a_1, a_2, \ldots),$$

wenn d durch jeden gemeinsamen Teiler von $a_1, a_2, \ldots$ teilbar ist.

Es gibt Körper mit der Eigenschaft $\mathfrak{L}\Delta$, welche nicht die Eigenschaft $\mathfrak{V}\Delta$ haben.

Angabe eines Beispiels: Sei $\mathfrak{K}_1$ ein beliebiger ganz-abgeschlossener Körper, in dem nicht jedes Element als ganz gilt, und $\mathfrak{K}_2$ der Körper der rationalen Funktionen zweier Unbestimmter ξ, η mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}_1$. Als ganze Elemente von $\mathfrak{K}_2$ bezeichne man die Polynome

$$A_{00} + a_{10}\,\xi + a_{01}\,\eta + a_{20}\,\xi^2 + \cdots,$$

in denen das konstante Glied A_{00} ein ganzes Element von $\mathfrak{K}_1$ ist, die übrigen Koeffizienten beliebige Elemente von $\mathfrak{K}_1$ sind. Daß diese Polynome wirklich einen Ring $\mathfrak{G}_2$ bilden und daß jedes Element von $\mathfrak{K}_2$ als Quotient zweier Elemente von $\mathfrak{G}_2$ geschrieben werden kann, ist klar. Ich beweise jetzt:

I. Genügt das Element $\varrho(\xi, \eta)$ von $\mathfrak{K}_2$ einer Gleichung

$$\varrho^n + \alpha_1(\xi, \eta) \cdot \varrho^{n-1} + \cdots + \alpha_n(\xi, \eta) = 0$$

mit Koeffizienten aus $\mathfrak{G}_2$, so ist $\varrho(\xi, \eta)$ ein Polynom in ξ, η. Denn sei $\mathfrak{G}_2'$ der Ring der Polynome in η, deren Koeffizienten die ganzen und gebrochenen rationalen Funktionen von ξ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}_1$ sind. Nimmt man für den Augenblick $\mathfrak{G}_2'$ als Ring der ganzen Elemente von $\mathfrak{K}_2$, so ist $\mathfrak{K}_2$ nach § 1 vollständig. Dann hat $\mathfrak{K}_2$ auch die Eigenschaft $\mathfrak{V}\Delta$ und, nach dem Monotoniesatz, auch die Eigenschaft $\mathfrak{L}\Delta$. Da $\alpha_1(\xi, \eta), \ldots, \alpha_n(\xi, \eta)$ bei der neuen Wahl der ganzen Elemente von $\mathfrak{K}_2$ erst recht ganz sind, ist also auch $\varrho(\xi, \eta)$ ein ganzes Element von $\mathfrak{K}_2$, hat also die Form

$$\varrho(\xi, \eta) = \frac{\sigma(\xi, \eta)}{\tau(\xi)},$$

wo Zähler und Nenner Polynome sind. Dieselbe Betrachtung unter Vertauschung von ξ und η zeigt, daß $\varrho(\xi, \eta)$ ein Polynom in ξ mit von η abhängigen Koeffizienten ist. Die

Division von $\sigma(\xi, \eta)$ durch $\tau(\xi)$ nach dem bekannten Divisionsschema liefert diese Koeffizienten als Polynome in η.

II. Der Körper $\mathfrak{K}_2$ ist ganz-abgeschlossen. Denn genügt $\varrho(\xi, \eta)$ der Gleichung

$$\varrho^n + (A_1 + \cdots) \cdot \varrho^{n-1} + \cdots + (A_n + \cdots) = 0,$$

in der die Koeffizienten Elemente von $\mathfrak{G}_2$ sind, so ist $\varrho(\xi, \eta)$ nach I ein Polynom:

$$\varrho(\xi, \eta) = r_{00} + r_{10}\,\xi + r_{01}\,\eta + \cdots.$$

Dann besteht aber die Gleichung

$$r_{00}^n + A_1\, r_{00}^{n-1} + \cdots + A_n = 0.$$

Da $\mathfrak{K}_1$ die Eigenschaft $\mathfrak{L}\Delta$ hat, folgt hieraus, daß r_{00} ganz ist.

III. Die gemeinsamen Teiler der Elemente ξ und η von $\mathfrak{K}_2$ sind die Funktionen

$$1 : (c_{00} + c_{10}\,\xi + c_{01}\,\eta + \cdots).$$

Daß jede solche Funktion ein gemeinsamer Teiler ist, ist klar. Ist umgekehrt $\delta(\xi, \eta)$ ein gemeinsamer Teiler von ξ und η, so ist

$$\frac{1}{\delta(\xi, \eta)} = \frac{A_{00} + a_{10}\,\xi + \cdots}{\xi} = \frac{B_{00} + b_{10}\,\xi + \cdots}{\eta}.$$

Daraus folgt

$$A_{00} = a_{0j} = B_{00} = b_{i0} = 0.$$

IV. Im System $\mathfrak{V}$ besteht das Ideal (ξ, η) aus allen Polynomen mit dem konstanten Glied 0. Denn das Ideal enthält nur ganze Elemente von $\mathfrak{K}_2$. Das Element

$$A_{00} + a_{10}\,\xi + a_{01}\,\eta + \cdots$$

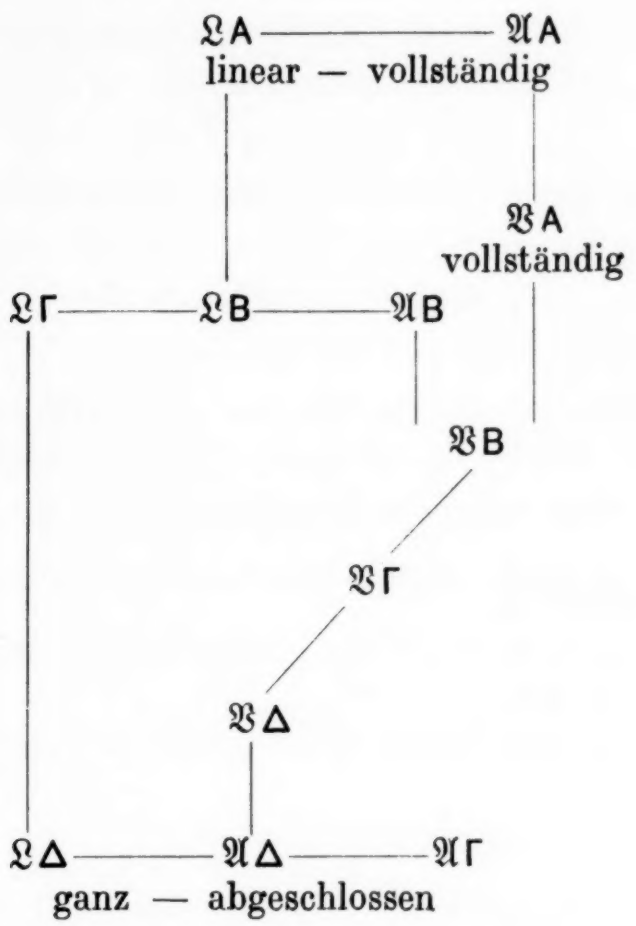
gehört aber nach III dann und nur dann zu (ξ, η), wenn für beliebige c_{ij} stets

$$\{A_{00} + a_{10}\,\xi + a_{01}\,\eta + \cdots\} \cdot \{c_{00} + c_{10}\,\xi + c_{01}\,\eta + \cdots\}$$

ganz ist. Das ist für $A_{00} = 0$ immer, für $A_{00} \neq 0$ nie der Fall.

V. Der Körper $\mathfrak{K}_2$ hat nicht die Eigenschaft $\mathfrak{V}\Delta$. Sei nämlich r ein gebrochenes Element von $\mathfrak{K}_1$. Dann ist r auch als Element von $\mathfrak{K}_2$ nicht ganz. Trotzdem gehören die Elemente $r\xi$ und $r\eta$ im System $\mathfrak{V}$ dem Ideal (ξ, η) an.

Aus dem Beispiel folgt, daß man aus der Eigenschaft $\mathfrak{L}\Delta$ auch nicht auf die Eigenschaften $\mathfrak{V}\mathsf{B}$ und $\mathfrak{L}\mathsf{B}$ schließen kann. Weiter ist bekannt, daß nicht jeder Körper mit der Eigenschaft $\mathfrak{V}\mathsf{A}$ die Eigenschaft $\mathfrak{L}\mathsf{A}$ hat. Ein Beispiel wird in § 10 angegeben. Mit Rücksicht auf den in § 3 bewiesenen Satz, daß für jedes Idealsystem aus der Eigenschaft B in Verbindung mit der Vollständigkeit die Eigenschaft A folgt, ergibt sich daraus dann noch, daß nicht jeder Körper mit der Eigenschaft $\mathfrak{V}\mathsf{A}$, also erst recht nicht jeder Körper mit der Eigenschaft $\mathfrak{V}\mathsf{B}$ die Eigenschaft $\mathfrak{L}\mathsf{B}$ hat. Schließlich ist bekannt, daß es Körper mit der Eigenschaft $\mathfrak{L}\mathsf{B}$ gibt, die nicht die Eigenschaft $\mathfrak{L}\mathsf{A}$ haben. Ein Beispiel steht in § 11. Daraus folgt dann noch, daß es Körper mit der Eigenschaft $\mathfrak{L}\mathsf{B}$ und erst recht Körper mit der Eigenschaft $\mathfrak{V}\mathsf{B}$ gibt, die nicht die Eigenschaft $\mathfrak{V}\mathsf{A}$ haben. Berücksichtigt man alles dies hier schon, so erhält man die folgende Übersicht über die behandelten Teilbarkeitseigenschaften:



Horizontale Verbindung bedeutet: Jede der Eigenschaften ist eine Folge der andern.
Vertikale Verbindung bedeutet: Die unten stehende Eigenschaft ist eine Folge der oben stehenden. Die obere Eigenschaft ist keine Folge der unteren.
Schräge Verbindung bedeutet: Die unten stehende Eigenschaft ist eine Folge der oben stehenden. Ob die oben stehende eine Folge der unten stehenden ist, wird in dieser Arbeit nicht untersucht.

Ein Blick auf die schematische Darstellung zeigt, daß die Eigenschaft Γ sich nicht monoton verhält.

Es sei noch angemerkt, daß die Beispiele in der Einleitung die Eigenschaften 𝔙Δ und 𝔏B beschreiben.

§ 8. Endlichkeitsbedingungen.

Aus der ganzen Abgeschlossenheit kann man nicht auf die Eigenschaft 𝔙B und noch weniger auf die Eigenschaft 𝔏B schließen. Merkwürdigerweise sind diese Schlüsse aber möglich, wenn man voraussetzt, daß Folgen von Idealen, die in bestimmter Weise gebildet werden, stets nach endlich vielen Schritten abbrechen.

Hilfssatz 1. *Bei Zugrundelegung eines beliebigen Idealsystems seien im Körper* $\mathfrak{K}$ *die Bedingungen erfüllt*:

1. $\mathfrak{K}$ *hat die Eigenschaft* Δ.
2. *Jede Folge* $\mathfrak{a}_1 < \mathfrak{a}_2 < \mathfrak{a}_3 < \cdots$ *von ganzen Idealen bricht ab.*
3. *Ist* $(A_1, A_2, \ldots, A_n) < (1)$, *so gibt es stets ein gebrochenes Element* r, *für das* $rA_1, rA_2, \ldots, rA_n$ *ganz sind.*

Dann hat $\mathfrak{K}$ *die Eigenschaft* B.

Beweis: Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal, so wähle man zunächst ein Element $c \neq 0$ so,

daß $\mathfrak{a}_1 = (c) \cdot \mathfrak{a}$ ein ganzes Ideal wird. Ist $\mathfrak{a}_1 < (1)$, so bestimme man nach 3 ein gebrochenes Element r_1 so, daß alle Elemente von $(r_1) \cdot \mathfrak{a}_1$ ganz sind. Dann ist

$$\mathfrak{a}_2 = (1, r_1) \cdot \mathfrak{a}_1 \leqq (1).$$

Aus 1 folgt $(r_1) \cdot \mathfrak{a}_1 > \mathfrak{a}_1$, also erst recht $\mathfrak{a}_2 > \mathfrak{a}_1$. Ist $\mathfrak{a}_2 < (1)$, so bestimme man entsprechend r_2 so, daß

$$\mathfrak{a}_2 < \mathfrak{a}_3 = (1, r_2) \cdot \mathfrak{a}_2 \leqq (1)$$

wird. Usw. Nach 2 muß einmal $\mathfrak{a}_n = (1)$ werden.
Dann ist

$$\mathfrak{a} \cdot (c) \cdot (1, r_1) \cdot (1, r_2) \cdots (1, r_{n-1}) = (1).$$

Bei Zugrundelegung eines beliebigen Idealsystems seien im Körper $\mathfrak{K}$ die Bedingungen erfüllt:

1. *$\mathfrak{K}$ hat die Eigenschaft* Δ.

2. *Jede Folge $\mathfrak{a}_1 < \mathfrak{a}_2 < \mathfrak{a}_3 < \cdots$ von ganzen Idealen bricht ab.*

Dann hat $\mathfrak{K}$ die Eigenschaft $\mathfrak{V}$B.

Beweis: Man kennzeichne Ideale des Systems $\mathfrak{V}$ durch Hinzufügung des Index $\mathfrak{V}$. Ist

$$\mathfrak{a}_\mathfrak{V} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)_\mathfrak{V}$$

irgend ein ganzes Ideal des Systems $\mathfrak{V}$, so ist im gegebenen Idealsystem

$$\mathfrak{a}_0 = (A_1, A_2, \ldots A_n) \leqq \mathfrak{a}_\mathfrak{V}.$$

Gilt das Gleichheitszeichen nicht, so kann man A_{n+1} so bestimmen, daß

$$\mathfrak{a}_0 < \mathfrak{a}_1 = (A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}) \leqq \mathfrak{a}_\mathfrak{V}$$

wird. Gilt auch hier das Gleichheitszeichen nicht, so kann man A_{n+2} so bestimmen, daß

$$\mathfrak{a}_1 < \mathfrak{a}_2 = (A_1, A_2, \ldots, A_{n+2}) \leqq \mathfrak{a}_\mathfrak{V}$$

wird, usw. Nach Bedingung 2 wird einmal

$$\mathfrak{a}_m = (A_1, A_2, \ldots, A_{n+m}) = \mathfrak{a}_\mathfrak{V}.$$

Jedes ganze Ideal des Systems $\mathfrak{V}$ ist also auch ein Ideal des gegebenen Systems. Da jedes Ideal durch Multiplikation mit einem durch ein Element erzeugten Ideal in ein ganzes Ideal übergeführt werden kann, gilt dies auch für beliebige Ideale des Systems $\mathfrak{V}$. Jetzt ist leicht zu sehen, daß die drei Bedingungen des Hilfssatzes für das Idealsystem $\mathfrak{V}$ erfüllt sind:

1. Sei $(r) \cdot \mathfrak{a}_\mathfrak{V} \leqq \mathfrak{a}_\mathfrak{V}$. Ist im gegebenen Idealsystem $\mathfrak{a}_\mathfrak{V} = (a_1, a_2, \ldots)$, so ist jedes Element ra_i in $(a_1, a_2, \ldots)$ enthalten. Nach Bedingung 1 des Satzes ist r ganz. Also hat $\mathfrak{K}$ die Eigenschaft $\mathfrak{V}\Delta$.

2. Jede Folge $\mathfrak{a}_1 < \mathfrak{a}_2 < \cdots$ von ganzen Idealen des Systems $\mathfrak{V}$ ist eine spezielle Folge der in Bedingung 2 des Satzes genannten Art.

3. Ist $(A_1, A_2, \ldots)_\mathfrak{V} < (1)$, so ist das Element 1 nicht durch jeden gemeinsamen Teiler von $A_1, A_2, \ldots$ teilbar. Es gibt also ein gebrochenes Element r, für das $rA_1, rA_2, \ldots$ ganz werden.

Hilfssatz 2. *Bei Zugrundelegung des Idealsystems $\mathfrak{L}$ sei im Körper $\mathfrak{K}$ die Bedingung erfüllt*:

Jede Folge $\mathfrak{a}_1 > \mathfrak{a}_2 > \mathfrak{a}_3 > \cdots$ von ganzen Idealen, die nicht nur 0 als gemeinsames Element enthalten, bricht ab.

Dann gibt es in $\mathfrak{K}$ zu jedem Ideal $(A_1, A_2, \ldots, A_n) < (1)$ ein gebrochenes Element r, für welches $rA_1, rA_2, \ldots, rA_n$ ganz sind.

Beweis: Sei $A \neq 0$ und

$$\mathfrak{a} = (A, B_1, B_2, \ldots) < (1).$$

Man setze

$$\mathfrak{b} = (B_1, B_2, \ldots).$$

Dann ist

$$(1) > ((A), \mathfrak{b}) \geqq ((A), \mathfrak{b}^2) \geqq ((A), \mathfrak{b}^3) \geqq \cdots.$$

Da die Ideale der Folge das Element $A \neq 0$ gemeinsam haben, ist für eine natürliche Zahl k

$$((A), \mathfrak{b}^k) = ((A), \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{b}^k).$$

Sind $p_1, p_2, \ldots$ erzeugende Elemente von $\mathfrak{b}^k$, so bestehen also, da das Idealsystem $\mathfrak{L}$ betrachtet wird, Gleichungen

$$p_i = X_i A + B_{i1} p_1 + B_{i2} p_2 + \cdots.$$

Dabei sind die X_i ganz und die B_{ij} Elemente von $\mathfrak{b}$. Setzt man

$$D = \begin{vmatrix} B_{11} - 1 & B_{12} & \ldots \\ B_{21} & B_{22} - 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

so folgt aus den Gleichungen

$$D \cdot p_i = \text{Vielfaches von } A,$$

also

$$(D) \cdot \mathfrak{b}^k \leqq (A).$$

Nun ist D selbst nicht durch A teilbar. Denn die Entwicklung der Determinante zeigt, daß $D \pm 1$ ein Element von $\mathfrak{b}$, also auch von $\mathfrak{a}$ ist. Da 1 kein Element von $\mathfrak{a}$ ist, kann D nicht in $\mathfrak{a}$ und folglich auch nicht in (A) enthalten sein. Unter allen Exponenten k, für welche $(D) \cdot \mathfrak{b}^k \leqq (A)$ ist, wähle man den kleinsten. Sei C ein Element von $(D) \cdot \mathfrak{b}^{k-1}$, das nicht zu (A) gehört. Dann ist C nicht durch A teilbar, wohl aber sind $CA, CB_1, CB_2, \ldots$ durch A teilbar. Das Element $r = C : A$ hat also die geforderten Eigenschaften.

Aus den beiden Hilfssätzen ergibt sich sofort:

Bei Zugrundelegung des Idealsystems $\mathfrak{L}$ seien im Körper $\mathfrak{K}$ die Bedingungen erfüllt:

1. *$\mathfrak{K}$ hat die Eigenschaft Δ.*
2. *Jede Folge $\mathfrak{a}_1 < \mathfrak{a}_2 < \mathfrak{a}_3 < \cdots$ von ganzen Idealen bricht ab.*
3. *Jede Folge $\mathfrak{a}_1 > \mathfrak{a}_2 > \mathfrak{a}_3 > \cdots$ von ganzen Idealen, die nicht nur 0 als gemeinsames Element enthalten, bricht ab.*

Dann hat $\mathfrak{K}$ die Eigenschaft $\mathfrak{LB}$.

Die Dedekindsche Theorie ist so, wie sie in § 4 dargestellt wurde, nicht auf jeden ganz-abgeschlossenen Körper anwendbar. Ist aber noch die erste Endlichkeitsbedingung des soeben bewiesenen Satzes erfüllt, so gilt die Theorie für das Idealsystem $\mathfrak{V}$. Sind beide Endlichkeitsbedingungen erfüllt, so gilt sie für das ursprüngliche Dedekindsche Idealsystem $\mathfrak{L}$ [3]).

§ 9. Der Gauß-Kronecker-Dedekindsche Satz.

Im folgenden soll das Verhalten von Teilbarkeitseigenschaften bei Erweiterung des Körpers untersucht werden. Das wichtigste Hilfsmittel, das bereits beim Beispiel in § 7 zu einer, wenn auch geringen, Abkürzung der Schlüsse hätte verwandt werden können, ist dabei ein Satz, der in einem Spezialfall zuerst von Gauß bewiesen wurde. Kronecker

[3]) Vgl. E. Noether, Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern, Math. Annalen 96 (1926), S. 26—61, W. Krull, Zur Theorie der allgemeinen Zahlringe, Math. Annalen 99 (1928), S. 51—70 und B. L. van der Waerden, Zur Produktzerlegung der Ideale in ganz-abgeschlossenen Ringen, Math. Annalen 101 (1929), S. 293—308.

hat dann den hier unter 2 genannten Satz bewiesen, Dedekind den Satz 1. Ich stelle hier den Dedekindschen Beweis mit einer Vereinfachung dar.

1. *Seien*

$$a_0 + a_1 x + \cdots \qquad b_0 + b_1 x + \cdots$$

zwei Polynome mit Koeffizienten aus dem Körper $\mathfrak{R}$ *und sei*

$$(a_0 + a_1 x + \cdots) \cdot (b_0 + b_1 x + \cdots) = c_0 + c_1 x + \cdots .$$

Hat $\mathfrak{R}$ *in irgendeinem Idealsystem die Eigenschaft* Γ, *so ist*

$$(a_0, a_1, \ldots) \cdot (b_0, b_1, \ldots) = (c_0, c_1, \ldots).$$

Beweis: I. Es ist

$$(a_0, a_1, \ldots) \cdot (b_0, b_1, \ldots) \geqq (c_0, c_1, \ldots).$$

Das folgt aus der Definitionsbedingung 5 des Idealbegriffes in § 2, die hier zum ersten Male wesentlich gebraucht wird. Denn jeder Koeffizient des Produktpolynoms hat die Form

$$c_k = \Sigma\, a_i b_{k-i}.$$

II. Sei n der Grad des Polynoms mit den Koeffizienten b_j. Dann ist

$$(a_0, a_1, \ldots)^{n+1} (b_0, b_1, \ldots) \leqq (a_0, a_1, \ldots)^n (c_0, c_1, \ldots).$$

Zum Beweise ordne man die erzeugenden Elemente des links stehenden Ideals, also alle Produkte aus $n+1$ gleichen oder verschiedenen der Elemente $a_0, a_1, \ldots$ und einem Elemente b_j in bestimmter Weise: In jedem Produkt ordne man die Faktoren a_i nach wachsenden Indizes und füge b_j hinter dem $(j+1)$-ten Faktor a_i ein. Den Produkten gebe man nun eine lexikographische Anordnung. Sind p und p' zwei Produkte und steht der erste Faktor, in dem p und p' nicht übereinstimmen, wenn man die in Betracht kommenden Elemente in der Reihenfolge

$$b_j \quad a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \ldots$$

aufschreibt, bei p weiter links als bei p', so soll das Produkt p in der herzustellenden Anordnung vor p' stehen. Daß jedes der Produkte p im Ideale

$$\mathfrak{c} = (a_0, a_1, \ldots)^n (c_0, c_1, \ldots)$$

enthalten ist, ergibt sich jetzt durch vollständige Induktion: Für das in der lexikographischen Anordnung erste Produkt $a_0 \cdot b_0 \cdot a_0 \cdot a_0 \cdots$ folgt es sofort aus der Gleichung $a_0 b_0 = c_0$. Weiß man ferner schon, daß alle vor dem Produkt

$$p = \cdots a_r a_s b_j a_t \cdots$$

stehenden Produkte zu $\mathfrak{c}$ gehören, so multipliziert man die Gleichung

$$c_{s+j} = \cdots + a_{s-1} b_{j+1} + a_s b_j + a_{s+1} b_{j-1} + \cdots$$

mit allen Faktoren von p mit Ausnahme von a_s und b_j. Auf der linken Seite der Gleichung steht dann ein Element von $\mathfrak{c}$. Weiter geht der Summand $a_s b_j$ in p über. Jeder vor $a_s b_j$ stehende Summand geht in ein Produkt p' über, das in der lexikographischen Anordnung vor p kommt, weil die ersten $j+1$ Faktoren von p' aus denen von p durch Ersetzung von a_s durch ein a_i mit niedrigerem Index und Umordnung der Faktoren hervorgehen. Jeder hinter $a_s b_j$ stehende Summand p'' kommt in der lexikographischen Anordnung ebenfalls vor p. Denn der zu p'' gehörende Faktor b steht an einer früheren Stelle als in p, während die dem Faktor b vorangehenden Faktoren a in p'' und p übereinstimmen. Nach der Voraussetzung des Induktionsschlusses gehören also alle Faktoren p' und p'' zu $\mathfrak{c}$. Aus der Bedingung 5 in § 2 folgt, daß p zu $\mathfrak{c}$ gehört.

III. Es ist

$$(a_0, a_1, \ldots) \cdot (b_0, b_1, \ldots) \leqq (c_0, c_1, \ldots).$$

Das folgt, wenn $(a_0, a_1, \ldots) \neq (0)$ ist, aus II und der vorausgesetzten Eigenschaft Γ. Für $(a_0, a_1, \ldots) = (0)$ ist der Satz selbstverständlich.

2. *Seien*

$$a_0 + a_1 x + \cdots \qquad\qquad b_0 + b_1 x + \cdots$$

zwei Polynome mit Koeffizienten aus dem Körper $\mathfrak{K}$, *deren Produkt ein Polynom mit ganzen Koeffizienten ist. Ist* $\mathfrak{K}$ *ganz-abgeschlossen, so sind alle Produkte* $a_i b_j$ *ganz.*

Beweis: Da $\mathfrak{K}$ die Eigenschaft $\mathfrak{A}\Gamma$ hat, ist im Idealsystem $\mathfrak{A}$, wenn $C_0, C_1, \ldots$ die Koeffizienten des Produktpolynoms sind,

$$(a_0, a_1, \ldots) \cdot (b_0, b_1, \ldots) = (C_0, C_1, \ldots) \leqq (1).$$

2*. *Das Produkt von zwei Polynomen*

$$a_0 + a_1 x + \cdots \qquad\qquad b_0 + b_1 x + \cdots$$

mit Koeffizienten aus dem Körper $\mathfrak{K}$ *habe nur dann lauter ganze Koeffizienten, wenn alle Produkte* $a_i b_j$ *ganz sind. Dann ist* $\mathfrak{K}$ *ganz-abgeschlossen.*

Beweis: Das Element r von $\mathfrak{K}$ möge der Gleichung

$$x^n + C_1 x^{n-1} + \cdots + C_n = 0$$

mit ganzen Koeffizienten genügen. Dann besteht für gewisse Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ von $\mathfrak{K}$ die Gleichung

$$(x - r) \cdot (x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}) = x^n + C_1 x^{n-1} + \cdots + C_n.$$

Nach der Voraussetzung ist das Produkt aus je einem Element der beiden links stehenden Polynome ganz. Also ist r ganz.

Aus 2 und 2* folgt sofort:

Satz 1 *gilt für das Idealsystem* $\mathfrak{V}$ *bereits dann, aber auch nur dann, wenn* $\mathfrak{K}$ *ganz-abgeschlossen ist.*

Diese Bemerkung zeigt, daß Satz 1 nicht umkehrbar ist. In den Idealsystemen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{V}$ besteht die Gleichung.

$$(a_0, a_1, \ldots) \cdot (b_0, b_1, \ldots) = (c_0, c_1, \ldots)$$

schon, wenn der Körper die Eigenschaft Δ hat. Man könnte vermuten, daß das Bestehen der Gleichung stets eine Folge der Eigenschaft Δ ist. Aber schon im Idealsystem $\mathfrak{L}$ gilt das nicht. Das zeigt der in § 7 gebildete Körper, der ja die Eigenschaft $\mathfrak{L}\Delta$ hat. Sei

$$a_0 + a_1 x = b_0 + b_1 x = \xi + \eta x.$$

Dann wird

$$(c_0, c_1, c_2) = (\xi^2, 2\xi\eta, \eta^2).$$

Ist $\mathfrak{K}_1$ der Körper der rationalen Zahlen, $\mathfrak{G}_1$ der Ring der ganzen rationalen Zahlen, so ist $a_0 b_1 = \xi\eta$ nicht im Ideal $(\xi^2, 2\xi\eta, \eta^2)$ des Systems $\mathfrak{L}$ enthalten. Es ist also

$$(a_0, a_1) \cdot (b_0, b_1) > (c_0, c_1, c_2).$$

§ 10. Rationale Funktionen.

Die Erweiterungskörper, die in diesem Paragraphen untersucht werden sollen, sind die Körper der rationalen Funktionen von beliebig vielen Unbestimmten $\xi, \eta, \ldots$ mit Koeffizienten aus einem beliebigen Körper. Jedes Element des Erweiterungskörpers kann als Quotient zweier Polynome in $\xi, \eta, \ldots$ mit Koeffizienten aus dem Grundkörper geschrieben werden. Diese Darstellung ist sogar auf mehr als eine Weise möglich. Zwei Polynome in $\xi, \eta, \ldots$ sind aber nur dann als Elemente des betrachteten Körpers gleich, wenn ihre Koeffizienten gleich sind. Die Anzahl der Unbestimmten $\xi, \eta, \ldots$ kann un-

endlich sein. In jedes einzelne Element des Erweiterungskörpers gehen aber auch dann nur endlich viele Unbestimmte ein.

Werden mehrere Körper betrachtet, so werden diese hier mit $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots$ bezeichnet, und zwar wird die Bezeichnung so gewählt, daß der größere Körper den größeren Index hat. Die Ringe der ganzen Elemente werden $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots$ genannt. Die Ideale in den einzelnen Körpern werden durch entsprechende Indizes gekennzeichnet. Wird ein Grundkörper und ein Erweiterungskörper untersucht, so werden meist die Elemente des Grundkörpers mit lateinischen, die des Erweiterungskörpers mit griechischen Buchstaben bezeichnet.

Sei $\mathfrak{K}_2$ der Körper der rationalen Funktionen einer Unbestimmten ξ mit Koeffizienten aus dem Körper $\mathfrak{K}_1$. Als ganze Elemente von $\mathfrak{K}_2$ sollen die Polynome in ξ mit ganzen Elementen von $\mathfrak{K}_1$ als Koeffizienten gelten. Dann gilt:

1. *Hat $\mathfrak{K}_1$ die Eigenschaft $\mathfrak{V}\Delta$, so ist im Idealsystem $\mathfrak{V}$ dann und nur dann*

$$(a_1, a_2, \ldots)_1 \geqq (b_1, b_2, \ldots)_1,$$

wenn

$$(a_1, a_2, \ldots)_2 \geqq (b_1, b_2, \ldots)_2$$

ist.

2. *Hat $\mathfrak{K}_1$ die Eigenschaft $\mathfrak{V}\mathsf{A}$ oder $\mathfrak{V}\mathsf{B}$ oder $\mathfrak{V}\Gamma$ oder $\mathfrak{V}\Delta$, so hat auch $\mathfrak{K}_2$ diese Eigenschaft.*

Beweis: I. Daß die ganzen Elemente von $\mathfrak{K}_2$ einen Ring bilden und daß jedes Element von $\mathfrak{K}_2$ als Quotient ganzer Elemente darstellbar ist, ist klar.

II. Zu Elementen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ von $\mathfrak{K}_2$ gibt es stets ein solches Element δ, daß erstens alle $\alpha_i : \delta$ Polynome mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}_1$ werden, und daß zweitens für jedes Element φ von $\mathfrak{K}_2$, für welches alle $\alpha_i : \varphi$ Polynome sind, auch $\delta : \varphi$ ein Polynom ist. Denn sieht man für den Augenblick alle Polynome mit beliebigen Koeffizienten aus $\mathfrak{K}_1$ als ganze Elemente von $\mathfrak{K}_2$ an, so ist $\mathfrak{K}_2$ vollständig.

III. Der Körper $\mathfrak{K}_1$ sei ganz-abgeschlossen. Ist δ ein nach II zu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ bestimmtes Element von $\mathfrak{K}_2$ und

$$\alpha_i = \delta \cdot (a_{i0} + a_{i1}\xi + \cdots),$$

so ist das Element φ von $\mathfrak{K}_2$ dann und nur dann ein gemeinsamer Teiler von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, wenn erstens $\delta : \varphi$ ein Polynom ist:

$$\delta = \varphi \cdot (f_0 + f_1\xi + \cdots),$$

und zweitens im Idealsystem $\mathfrak{V}$

$$(f_0, f_1, \ldots)_1 \cdot (\ldots, a_{ij}, \ldots)_1 \leqq (1)_1$$

ist. Denn sind die Bedingungen erfüllt, so sind alle $\alpha_i : \varphi$ Polynome mit ganzen Koeffizienten. Umgekehrt ist die erste Bedingung nach II notwendig. Ferner muß, damit $\alpha_i : \varphi$ ganze Koeffizienten hat, nach dem Gauß-Kronecker-Dedekindschen Satze

$$(f_0, f_1, \ldots)_1 \cdot (a_{i0}, a_{i1}, \ldots)_1 \leqq (1)_1$$

sein. Gilt dies für jedes i, so ist die zweite Bedingung erfüllt.

IV. Dann und nur dann gehört das Element β von $\mathfrak{K}_2$ im Idealsystem $\mathfrak{V}$ zu $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)_2$, wenn erstens $\beta : \delta$ ein Polynom ist:

$$\beta = \delta \cdot (b_0 + b_1\xi + \cdots),$$

und zweitens

$$(b_0, b_1, \ldots)_1 \leqq (\ldots, a_{ij}, \ldots)_1$$

ist. Denn sind die Bedingungen erfüllt, so ist $\beta : \varphi$ nach III für jeden gemeinsamen Teiler

φ von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ein Polynom mit Koeffizienten aus $\mathfrak{G}_1$. Umgekehrt ist die erste Bedingung notwendig. Denn sonst wäre $\frac{1}{f} \cdot \delta$ ein gemeinsamer Teiler von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, aber kein Teiler von β, wenn

$$(f)_1 \cdot (\ldots, a_{ij}, \ldots)_1 \leqq (1)_1.$$

Ist die zweite Bedingung nicht erfüllt, so gibt es, da das Idealsystem $\mathfrak{V}$ betrachtet wird, in $\mathfrak{R}_1$ einen gemeinsamen Teiler $1 : f$ der a_{ij}, von dem nicht sämtliche Elemente $b_0, b_1, \ldots$ Vielfache sind. Dann ist nach III das Element $\frac{1}{f} \cdot \delta$ ein gemeinsamer Teiler von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Das Polynom $\beta : \frac{1}{f}\,\delta$ hat aber nicht nur ganze Koeffizienten.

V. Dann und nur dann ist

$$(a_1, a_2, \ldots)_1 \geqq (b_1, b_2, \ldots)_1,$$

wenn

$$(a_1, a_2, \ldots)_2 \geqq (b_1, b_2, \ldots)_2$$

ist. Das folgt aus IV, wenn man $\alpha_i = a_i$ und $\delta = 1$ setzt.

VI. Jedes Ideal des Systems $\mathfrak{V}$ in $\mathfrak{R}_2$ läßt sich durch Elemente $\delta d_1, \delta d_2, \ldots$ erzeugen, wo $d_1, d_2, \ldots$ Elemente von $\mathfrak{R}_1$ sind. Denn nach IV bestehen die Ideale $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)_2$ und $(\ldots, \delta a_{ij}, \ldots)_2$ aus denselben Elementen.

VII. Hat $\mathfrak{R}_1$ im Idealsystem $\mathfrak{V}$ die Eigenschaft A oder B oder Γ oder Δ, so hat $\mathfrak{R}_2$ dieselbe Eigenschaft:

A. Sei nach VI

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)_2 = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots)_2$$

und

$$(a_1, a_2, \ldots)_1 = (d)_1.$$

Dann ist nach V

$$(\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots)_2 = (\alpha)_2 \cdot (a_1, a_2, \ldots)_2 = (\alpha d)_2.$$

B. Sei wieder

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)_2 = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots)_2$$

und

$$(a_1, a_2, \ldots)_1 \cdot (x_1, x_2, \ldots)_1 = (\ldots, a_i x_j, \ldots)_1 = (1)_1.$$

Dann ist nach V

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)_2 \cdot \left(\frac{x_1}{\alpha}, \frac{x_2}{\alpha}, \ldots\right)_2 = (\ldots, a_i x_j, \ldots)_2 = (1)_2.$$

Γ. Sei

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)_2 = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots)_2 \qquad (\gamma_1, \gamma_2, \ldots)_2 = (\gamma c_1, \gamma c_2, \ldots)_2$$

und

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)_2 \cdot (\gamma_1, \gamma_2, \ldots)_2 \geqq (\gamma_1, \gamma_2, \ldots)_2.$$

Dann ist

$$(a_1, a_2, \ldots)_2 \cdot (c_1, c_2, \ldots)_2 \geqq \left(\frac{1}{\alpha}\right)_2 \cdot (c_1, c_2, \ldots)_2.$$

Nach IV ist also $c_k : \alpha$ ein Polynom, dessen Koeffizienten dem Ideal $(\ldots, a_i c_k, \ldots)_1$ angehören. Ist

$$\frac{1}{\alpha} = b_0 + b_1 \xi + \cdots,$$

so gehören also die Elemente $b_i c_k$ zu

$$(a_1, a_2, \ldots)_1 \cdot (c_1, c_2, \ldots)_1.$$

Daraus folgt

$$(a_1, a_2, \ldots)_1 \geqq (b_0, b_1, \ldots)_1$$

und nach IV

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)_2 \geqq (1)_2.$$

Δ. Sei

$$(\gamma_1, \gamma_2, \ldots)_2 = (\gamma c_1, \gamma c_2, \ldots)_2$$

und

$$(\varrho)_2 \cdot (\gamma_1, \gamma_2, \ldots)_2 \leqq (\gamma_1, \gamma_2, \ldots)_2.$$

Dann ist

$$(\varrho)_2 \cdot (c_1, c_2, \ldots)_2 \leqq (c_1, c_2, \ldots)_2.$$

Nach IV muß ϱc_k ein Polynom sein. Ist

$$\varrho = r_0 + r_1 \xi + \cdots,$$

so müssen alle Elemente $r_i c_k$ in $(c_1, c_2, \ldots)_1$ enthalten sein. Daraus folgt für jedes i, daß r_i ganz ist. Also ist ϱ ganz.

Sei $\mathfrak{K}$ der Körper der rationalen Funktionen von endlich oder unendlich vielen Unbestimmten $\xi, \eta, \ldots$ mit Koeffizienten aus dem Körper $\mathfrak{K}_1$. Als ganze Elemente von $\mathfrak{K}$ sollen die Polynome in $\xi, \eta, \ldots$ mit ganzen Elementen von $\mathfrak{K}_1$ als Koeffizienten gelten. Hat $\mathfrak{K}_1$ die Eigenschaft $\mathfrak{V}\mathsf{A}$ oder $\mathfrak{V}\mathsf{B}$ oder $\mathfrak{V}\Gamma$ oder $\mathfrak{V}\Delta$, so hat auch $\mathfrak{K}$ diese Eigenschaft.

Beweis: I. Daß die ganzen Elemente von $\mathfrak{K}$ einen Ring bilden und daß jedes Element von $\mathfrak{K}$ als Quotient ganzer Elemente darstellbar ist, ist klar.

II. Der für eine Unbestimmte bewiesene Satz gilt auch im Falle endlich vieler Unbestimmter. Das ergibt sich durch vollständige Induktion.

III. Der Körper $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_4$ enthalte unendlich viele Unbestimmte. Sei $\mathfrak{K}_2$ der Körper der rationalen Funktionen einer endlichen Menge der Unbestimmten. Ist A ein ganzes Element von $\mathfrak{K}_2$, so ist A ein Polynom in $\xi, \eta, \ldots$ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{G}_1$, also auch ein ganzes Element von $\mathfrak{K}_4$. Ist $r = A : B$ ein gebrochenes Element von $\mathfrak{K}_2$, so ist r nicht gleich einem ganzen Element ϱ von $\mathfrak{K}_4$. Denn kämen in dem Polynom ϱ Unbestimmte vor, die nicht zu $\mathfrak{K}_2$ gehören, so kämen diese Unbestimmten auch in dem Polynom $B \cdot \varrho$ vor, was wegen $B \cdot \varrho = A$ nicht möglich ist.

IV. Hat $\mathfrak{K}_1$ die Eigenschaft $\mathfrak{V}\Delta$, so ist dann und nur dann

$$(a_1, a_2, \ldots)_2 \geqq (b_1, b_2, \ldots)_2,$$

wenn

$$(a_1, a_2, \ldots)_4 \geqq (b_1, b_2, \ldots)_4$$

ist. Denn gehört das Element b von $\mathfrak{K}_2$ dem Ideale $(a_1, a_2, \ldots)_4$ an und ist d ein gemeinsamer Teiler von $a_1, a_2, \ldots$ in $\mathfrak{K}_2$, so ist d nach III auch ein gemeinsamer Teiler von $a_1, a_2, \ldots$ in $\mathfrak{K}_4$. Daher ist $b : d$ in $\mathfrak{K}_4$, also auch in $\mathfrak{K}_2$ ganz. Gehört umgekehrt b dem Ideale $(a_1, a_2, \ldots)_2$ an und ist δ ein gemeinsamer Teiler von $a_1, a_2, \ldots$ in $\mathfrak{K}_4$, so ist $b : \delta$ ganz. Denn δ ist in einem Körper $\mathfrak{K}_3$ enthalten, dessen Elemente die rationalen Funktionen endlich vieler Unbestimmter mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}_2$ sind. Da nun $\mathfrak{K}_2$ nach II die Eigenschaft $\mathfrak{V}\Delta$ hat, folgt weiter aus II, daß b dem Ideal $(a_1, a_2, \ldots)_3$ angehört. Nach III sind die Elemente $a_i : \delta$ in $\mathfrak{K}_3$ ganz. Daher ist auch $b : \delta$ in $\mathfrak{K}_3$, also auch in $\mathfrak{K}_4$ ganz.

V. Hat $\mathfrak{K}_1$ im Idealsystem $\mathfrak{V}$ die Eigenschaft A oder B oder Γ oder Δ, so hat $\mathfrak{K}_4$ dieselbe Eigenschaft:

A. Die Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ von $\mathfrak{K}_4$ gehören einem Körper $\mathfrak{K}_2$ von rationalen Funktionen endlich vieler Unbestimmter an. Nach II gibt es in $\mathfrak{K}_2$ ein solches Element δ, daß

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)_2 = (\delta)_2$$

wird. Nach IV ist dann auch

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)_4 = (\delta)_4.$$

B. In demselben Körper $\mathfrak{K}_2$ gibt es nach II solche Elemente $\beta_1, \beta_2, \ldots$, daß

$$(\ldots, \alpha_i \beta_j, \ldots)_2 = (1)_2$$

wird. Nach IV ist dann auch

$$(\ldots, \alpha_i \beta_j, \ldots)_4 = (1)_4.$$

Γ. Ist

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)_4 \cdot (\gamma_1, \gamma_2, \ldots)_4 \geqq (\gamma_1, \gamma_2, \ldots)_4,$$

so ist in einem Körper $\mathfrak{K}_2$ der rationalen Funktionen endlich vieler Unbestimmter, der alle α_i und γ_k angehören, nach IV

$$(\ldots, \alpha_i \gamma_k, \ldots)_2 \geqq (\gamma_1, \gamma_2, \ldots)_2.$$

Nach II ist also

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)_2 \geqq (1)_2,$$

woraus nach IV

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)_4 \geqq (1)_4$$

folgt.

Δ. Ist

$$(\varrho)_4 \cdot (\gamma_1, \gamma_2, \ldots)_4 \leqq (\gamma_1, \gamma_2, \ldots)_4,$$

so ist in einem Körper $\mathfrak{K}_2$ der rationalen Funktionen endlich vieler Unbestimmter, dem $\varrho, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ angehören, nach IV

$$(\varrho\gamma_1, \varrho\gamma_2, \ldots)_2 \leqq (\gamma_1, \gamma_2, \ldots)_2.$$

Nach II und IV ist also $(\varrho)_4 \leqq (1)_4$.

Der Körper $\mathfrak{K}$ hat nie die Eigenschaft $\mathfrak{LB}$, *ausgenommen in dem Falle, daß $\mathfrak{K}$ der Körper der rationalen Funktionen einer einzigen Unbestimmten mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}_1$ ist und daß alle Elemente von $\mathfrak{K}_1$ als ganz angesehen werden.*

Beweis: Sei ξ eine der Unbestimmten und $\mathfrak{K}_2$ der Körper der rationalen Funktionen der übrigen Unbestimmten mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}_1$. Dann ist $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_3$ der Körper der rationalen Funktionen von ξ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{G}_3$ der Ring der Polynome in ξ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{G}_2$. Nur in dem genannten Ausnahmefall ist $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{K}_2$. Sonst gibt es in $\mathfrak{K}_2$ stets ein gebrochenes Element r. Ist dann

$$(X_0 + X_1 \xi + \cdots) + (Y_0 + Y_1 \xi + \cdots) \cdot r\xi = 1,$$

wo die X_i und Y_i zu $\mathfrak{G}_2$ gehören, so ist $X_0 = 1$. Es ist also

$$(X_0 + X_1 \xi + \cdots) \cdot r\xi$$

kein ganzes Element von $\mathfrak{K}_3$. Nach § 5, 1 kann $\mathfrak{K}_3$ nicht die Eigenschaft $\mathfrak{LB}$ haben.

Aus dem bewiesenen Satze folgt insbesondere:

Es gibt vollständige Körper, die nicht linear-vollständig sind.

§ 11. Algebraische Erweiterungskörper.

Der Körper $\mathfrak{K}_2$ heißt ein algebraischer Erweiterungskörper von $\mathfrak{K}_1$, wenn jedes Element von $\mathfrak{K}_1$ zu $\mathfrak{K}_2$ gehört und wenn jedes Element ω von $\mathfrak{K}_2$ einer Gleichung

$$\omega^n + c_1\,\omega^{n-1} + \cdots + c_n = 0$$

mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}_1$ genügt. Die Zahl n hängt dabei von ω ab; sie kann für eine Folge von Elementen von $\mathfrak{K}_2$ über alle Grenzen wachsen.

Sei $\mathfrak{K}_2$ ein algebraischer Erweiterungskörper des Körpers $\mathfrak{K}_1$. Als ganz sollen die Elemente ω von $\mathfrak{K}_2$ gelten, welche Gleichungen

$$\omega^n + C_1\,\omega^{n-1} + \cdots + C_n = 0$$

mit Koeffizienten aus $\mathfrak{G}_1$ genügen. Ist $\mathfrak{K}_1$ ganz-abgeschlossen, so gilt:

1. *Ein Element von $\mathfrak{K}_1$ ist dann und nur dann in $\mathfrak{K}_2$ ganz, wenn es zu $\mathfrak{G}_1$ gehört.*
2. *Der Körper $\mathfrak{K}_2$ ist ganz-abgeschlossen.*

Beweis: I. Ist $\mathfrak{G}_2$ die Menge der Elemente von $\mathfrak{K}_2$, die als ganz bezeichnet werden sollen, so gehört jedes Element von $\mathfrak{G}_1$ zu $\mathfrak{G}_2$. Denn es genügt einer Gleichung $\omega - C = 0$.

II. Die Menge $\mathfrak{G}_2$ ist ein Ring. Denn 1 gehört zu $\mathfrak{G}_2$. Sind weiter α und β Elemente von $\mathfrak{G}_2$ und genügen α und β den Gleichungen

$$\alpha^m + A_1\,\alpha^{m-1} + \cdots + A_m = 0 \qquad \beta^n + B_1\,\beta^{n-1} + \cdots + B_n = 0,$$

so kann man für $\omega = \alpha + \beta$ und $\omega = \alpha - \beta$ und $\omega = \alpha \cdot \beta$ die Elemente

$$\omega \cdot \alpha^i\,\beta^j \quad \text{mit} \quad \begin{matrix} i = 0, 1, \ldots, m-1 \\ j = 0, 1, \ldots, n-1 \end{matrix}$$

als homogene lineare Funktionen der $\alpha^i\,\beta^j$ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{G}_1$ darstellen. Daraus ergibt sich für ω eine Gleichung der Form

$$\begin{vmatrix} C_{11} - \omega & C_{12} & \cdots \\ C_{21} & C_{22} - \omega & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0.$$

III. Jedes Element ω von $\mathfrak{K}_2$ ist der Quotient zweier Elemente von $\mathfrak{G}_2$. Denn ω genügt einer Gleichung

$$C_0\,\omega^n + C_1\,\omega^{n-1} + \cdots + C_n = 0$$

mit ganzen Koeffizienten. Daraus folgt

$$(C_0\omega)^n + C_1 \cdot (C_0\omega)^{n-1} + \cdots + C_0^{n-1} C_n = 0.$$

Also gehört $C_0\omega$ zu $\mathfrak{G}_2$.

IV. Ist $\mathfrak{K}_1$ ganz-abgeschlossen und gehört r zu $\mathfrak{K}_1$ und zu $\mathfrak{G}_2$, so gehört r zu $\mathfrak{G}_1$. Denn es besteht eine Gleichung

$$r^n + C_1 r^{n-1} + \cdots + C_n = 0.$$

V. Ist $\mathfrak{K}_1$ ganz-abgeschlossen, so ist auch $\mathfrak{K}_2$ ganz-abgeschlossen. Denn genügt ω der Gleichung

$$\omega^n + \gamma_1\,\omega^{n-1} + \cdots + \gamma_n = 0$$

mit Koeffizienten aus $\mathfrak{G}_2$, so kann man die Elemente

$$\omega \cdot \gamma_1^{\varkappa_1} \cdot \gamma_2^{\varkappa_2} \cdots \gamma_n^{\varkappa_n} \cdot \omega^{\lambda},$$

in denen $\lambda = 0, 1, \ldots, n-1$ ist und $\varkappa_i$ die Zahlen $0, 1, \ldots, m-1$ durchläuft, wenn das zugehörige γ einer Gleichung

$$\gamma^m + A_1\,\gamma^{m-1} + \cdots + A_m = 0$$

genügt, als homogene lineare Funktionen der Elemente $\gamma_1^{\varkappa_1} \cdot \gamma_2^{\varkappa_2} \cdots \gamma_n^{\varkappa_n} \cdot \omega^{\lambda}$ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{G}_1$ darstellen. Daraus ergibt sich für ω eine Gleichung

$$\begin{vmatrix} C_{11} - \omega & C_{12} & \cdots \\ C_{21} & C_{22} - \omega & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0.$$

Also ist ω ganz.

In jedem der Körper $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ sei ein Idealsystem gegeben. Es sei stets

$$(a_1, a_2, \ldots)_1 \leqq (a_1, a_2, \ldots)_2.$$

Hat dann $\mathfrak{K}_1$ die Eigenschaft B, *so hat auch $\mathfrak{K}_2$ die Eigenschaft* B.

Beweis: Das Element ω von $\mathfrak{K}_2$ genüge der Gleichung

$$C_0 x^n + C_1 x^{n-1} + \cdots + C_n = 0,$$

deren Koeffizienten ganze Elemente von $\mathfrak{K}_1$ sind. Dann besteht eine Gleichung

$$C_0 x^n + C_1 x^{n-1} + \cdots + C_n = (x - \omega) \cdot (\gamma_0 x^{n-1} + \gamma_1 x^{n-2} + \cdots + \gamma_{n-1}).$$

Aus dem Gauß-Kronecker-Dedekindschen Satz folgt, daß die Elemente γ_i und $\gamma_i \omega$ ganz sind. Für das in $\mathfrak{K}_1$ gegebene Idealsystem soll die Eigenschaft B erfüllt sein. Man kann also $x_1, x_2, \ldots$ so bestimmen, daß

$$(C_0, C_1, \ldots)_1 \cdot (x_1, x_2, \ldots)_1 = (1)_1$$

wird. Die Elemente $C_i x_j$ sind dann ganz. Weiter sind die Elemente $\gamma_i x_j$ und $\gamma_i \omega x_j$ aus demselben Grunde wie die γ_i und $\gamma_i \omega$ ganz. Man hat also:

$$(1, \omega)_2 \cdot (\gamma_0, \gamma_1, \ldots)_2 \cdot (x_1, x_2, \ldots)_2 = (\ldots, \gamma_i x_j, \ldots, \gamma_i \omega x_j, \ldots)_2 \leqq (1)_2.$$

Andrerseits sind aber die Elemente $C_0, C_1, \ldots$ in

$$(1, \omega)_2 \cdot (\gamma_0, \gamma_1, \ldots)_2$$

enthalten. Also gilt:

$$\begin{aligned} &(1, \omega)_2 \cdot (\gamma_0, \gamma_1, \ldots)_2 \cdot (x_1, x_2, \ldots)_2 \\ &\quad \geqq (C_0, C_1, \ldots)_2 \cdot (x_1, x_2, \ldots)_2 = (\ldots, C_i x_j, \ldots)_2 \\ &\quad \geqq (\ldots, C_i x_j, \ldots)_1 = (1)_1. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$(1, \omega)_2 \cdot (\ldots, \gamma_i x_j, \ldots)_2 = (1)_2.$$

Denn das links stehende Ideal besteht nur aus ganzen Elementen und enthält das Element 1. Da jedes durch zwei Elemente erzeugte Ideal in der Form $(\alpha) \cdot (1, \omega)$ geschrieben werden kann, ist damit nach § 3 die Eigenschaft B für $\mathfrak{K}_2$ bewiesen.

Daß die Bedingung

$$(a_1, a_2, \ldots)_1 \leqq (a_1, a_2, \ldots)_2$$

erfüllt ist, wenn man in beiden Körpern das Idealsystem $\mathfrak{L}$ oder das Idealsystem $\mathfrak{A}$ nimmt, ist klar. Für das Idealsystem $\mathfrak{V}$ ist es nicht ohne weiteres ersichtlich.

Ist $\mathfrak{K}_1$ ganz-abgeschlossen, so gilt für die Idealsysteme $\mathfrak{V}$ stets:

$$(a_1, a_2, \ldots)_1 \leqq (a_1, a_2, \ldots)_2.$$

Beweis: I. Sind $b_1, b_2, \ldots$ Elemente von $\mathfrak{K}_1$ und ist jedes Element r von $\mathfrak{K}_1$, für welches die Elemente $b_1 r, b_2 r, \ldots$ sämtlich ganz sind, selbst ganz, so ist auch jedes Element ω von $\mathfrak{K}_2$, für welches die Elemente $b_1 \omega, b_2 \omega, \ldots$ sämtlich ganz sind, selbst ganz. Denn sei

$$x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots + c_n = 0$$

die Gleichung niedrigsten Grades mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}_1$, der ω genügt. Dann ist

$$x^n + b_i c_1 x^{n-1} + b_i^2 c_2 x^{n-2} + \cdots + b_i^n c_n = 0$$

die Gleichung niedrigsten Grades, der $b_i\omega$ genügt. Jede andere Gleichung mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}_1$, der $b_i\omega$ genügt, hat die Form

$$(x^n + b_i c_1 x^{n-1} + \cdots + b_i^n c_n) \cdot (x^m + d_1 x^{m-1} + \cdots + d_m) = 0.$$

Da $b_i\omega$ als ganzes Element einer solchen Gleichung mit ganzen Koeffizienten genügen muß, folgt aus dem Gauß-Kronecker-Dedekindschen Satze, daß die Elemente $b_i^k c_k$ ganz sind. Dann sind auch die Elemente

$$(c_k \cdot b_1^{\varkappa_1} \cdot b_2^{\varkappa_2} \cdots)^k \quad \text{mit} \quad \varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots = k$$

ganz. Da $\mathfrak{K}_1$ ganz-abgeschlossen ist, sind also alle Produkte $c_k \cdot b_1^{\varkappa_1} \cdot b_2^{\varkappa_2} \cdots$ ganz. Für jedes i ist

$$b_i \cdot (c_k \cdot b_1^{\lambda_1} \cdot b_2^{\lambda_2} \cdots) \quad \text{mit} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots = k - 1$$

ganz. Nach der Voraussetzung ist also $c_k \cdot b_1^{\lambda_1} \cdot b_2^{\lambda_2} \cdots$ ganz. Durch Fortsetzung des Schlußverfahrens ergibt sich, daß alle c_k ganz sein müssen. Da

$$\omega^n + c_1 \omega^{n-1} + \cdots + c_n = 0$$

ist, ist dann auch ω ganz.

II. Ist a ein Vielfaches aller gemeinsamen Teiler von $a_1, a_2, \ldots$ in $\mathfrak{K}_1$, so ist a auch in $\mathfrak{K}_2$ durch jeden gemeinsamen Teiler δ von $a_1, a_2, \ldots$ teilbar. Denn die Elemente $\frac{a_i}{a} \cdot \frac{a}{\delta}$ sind ganz. Ferner sind die Elemente $\frac{a_i}{a} \cdot r$ nur dann sämtlich ganz, wenn r ganz ist. Also ist $\frac{a}{\delta}$ nach I ganz.

Sei $\mathfrak{K}_2$ der Körper der rationalen Funktionen irgendwelcher Unbestimmter $\xi, \eta, \ldots$ mit Koeffizienten aus dem Körper $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_3$ ein algebraischer Erweiterungskörper von $\mathfrak{K}_2$. Dann heißt $\mathfrak{K}_3$ ein algebraischer Funktionenkörper mit dem Koeffizientenkörper $\mathfrak{K}_1$. Als ganz bezeichnet man die Elemente von $\mathfrak{K}_3$, welche Gleichungen

$$\omega^n + \varphi_1(\xi, \eta, \ldots) \cdot \omega^{n-1} + \cdots + \varphi_n(\xi, \eta, \ldots) = 0$$

genügen, in denen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ Polynome mit Koeffizienten aus $\mathfrak{G}_1$, also ganze Elemente des in § 10 betrachteten Körpers sind. Dann folgt aus den in § 10 und in diesem Paragraphen bewiesenen Sätzen:

In jedem algebraischen Funktionenkörper, dessen Koeffizientenkörper die Eigenschaft $\mathfrak{V}\mathsf{B}$ *hat, gilt bei der üblichen Wahl der ganzen Elemente die in* § 4 *entwickelte Dedekindsche Theorie für das Idealsystem* $\mathfrak{V}$ [4]).

Ist nur eine einzige Unbestimmte vorhanden und gilt jedes Element von $\mathfrak{K}_1$ als ganz, so hat $\mathfrak{K}_3$ die Eigenschaft $\mathfrak{L}\mathsf{B}$. In diesem Falle kann man die Dedekindsche Theorie auch auf das Idealsystem $\mathfrak{L}$ anwenden. Doch liefern beide Idealsysteme dasselbe. Denn nach § 5, 4 stimmen in einem Körper mit der Eigenschaft $\mathfrak{L}\mathsf{B}$ die Ideale der Systeme $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{V}$ überein.

Man wird noch den Nachweis wünschen, daß man bei der Behandlung der Körper, die nicht vollständig sind, mit dem Idealsystem $\mathfrak{L}$ tatsächlich nicht auskommt.

Es gibt Körper, welche die Eigenschaft $\mathfrak{V}\mathsf{B}$, *aber weder die Eigenschaft* $\mathfrak{V}\mathsf{A}$ *noch die Eigenschaft* $\mathfrak{L}\mathsf{B}$ *haben, sogar algebraische Funktionenkörper, in deren Koeffizientenkörpern alle Elemente als ganz gelten.*

Beweis: I. Sei A ein ganzes Element in einem vollständigen Körper $\mathfrak{K}_2$, das keine

[4]) Vgl. B. L. van der Waerden, Zur Produktzerlegung der Ideale in ganz-abgeschlossenen Ringen, Math. Annalen 101 (1929), S. 293—308.

Einheit ist und außer Einheiten und zu sich selbst assoziierten Elementen keine ganzen Elemente als Teiler hat. Sei B ein Element derselben Art, das zu A teilerfremd ist. Dann ist $A \cdot B$ nicht das Quadrat eines Elementes von $\mathfrak{K}_2$, und die formal gebildeten Ausdrücke $u + v \cdot \sqrt{AB}$ bilden einen algebraischen Erweiterungskörper $\mathfrak{K}_3$ von $\mathfrak{K}_2$. Die Elemente $\omega = u + v \cdot \sqrt{AB}$ und $\omega' = u - v \cdot \sqrt{AB}$ von $\mathfrak{K}_3$ genügen denselben Gleichungen

$$x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n = 0$$

mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}_2$. Ist ω ganz, so ist auch ω' ganz, also auch

$$\omega + \omega' = 2u \qquad \omega \cdot \omega' = u^2 - v^2 \cdot AB.$$

Der Körper $\mathfrak{K}_2$ sei so gewählt, daß diese Elemente nur dann ganz sind, wenn u und v ganz sind. Dann besteht $\mathfrak{G}_3$ genau aus den Elementen $U + V \cdot \sqrt{AB}$ mit ganzen U, V.

II. Ist $\mathfrak{K}_3$ vollständig, so lassen sich Elemente X, Y von $\mathfrak{G}_2$ so bestimmen, daß $X^2A - Y^2B$ eine Einheit von $\mathfrak{K}_2$ wird. Denn ist $U + V \cdot \sqrt{AB}$ der größte gemeinsame Teiler von A und $\sqrt{AB}$, so ist für Elemente U', V' von $\mathfrak{G}_2$

$$(U + V \cdot \sqrt{AB}) \cdot (U' + V' \cdot \sqrt{AB}) = A.$$

Dann ist auch

$$(U - V \cdot \sqrt{AB}) \cdot (U' - V' \cdot \sqrt{AB}) = A,$$

also

$$(U^2 - V^2 \cdot AB) \cdot (U'^2 - V'^2 \cdot AB) = A^2.$$

Nun kann $U^2 - V^2 \cdot AB$ keine Einheit sein. Denn dann wäre auch $U + V \cdot \sqrt{AB}$ eine Einheit und die Elemente A und $\sqrt{AB}$ wären teilerfremd. Das ist aber nicht der Fall, weil ihre Quadrate den gemeinsamen Teiler A haben. Auch $U'^2 - V'^2 \cdot AB$ kann keine Einheit sein. Denn dann wäre auch $U' + V' \cdot \sqrt{AB}$ eine Einheit und $\sqrt{AB}$ durch A teilbar. Das ist aber nicht der Fall, weil AB nicht durch A^2 teilbar ist. Nach der Voraussetzung über die Teiler von A bleibt also nur übrig, daß $U^2 - V^2 \cdot AB$ zu A assoziiert ist. Dann ist U^2, also auch U durch A teilbar. Daraus ergibt sich die Behauptung.

III. Sei $\mathfrak{K}_1$ ein beliebiger Körper, in dem $2 \neq 0$ ist, $\mathfrak{K}_2$ der Körper der rationalen Funktionen von zwei Unbestimmten ξ, η mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ der Ring der Polynome in ξ, η mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{G}_1$. Man setze $A = \xi$ und $B = \eta$. Dann ist $\mathfrak{K}_3$ nicht vollständig. Denn die Voraussetzungen von I sind erfüllt. Ist E eine Einheit von $\mathfrak{K}_2$, also ein von 0 verschiedenes Element von $\mathfrak{K}_1$, so ist die Gleichung

$$X \cdot \xi + Y \cdot \eta = E$$

in $\mathfrak{G}_2$ nicht lösbar. Die Gleichung

$$X^2 \cdot \xi - Y^2 \cdot \eta = E$$

ist also erst recht nicht lösbar.

IV. Der Körper $\mathfrak{K}_3$ in III hat nicht die Eigenschaft $\mathfrak{LB}$. Denn besteht für ein Element r von $\mathfrak{K}_2$ eine Gleichung

$$(X + Y \cdot \sqrt{AB}) + (X' + Y' \cdot \sqrt{AB}) \cdot r = 1,$$

so besteht auch die Gleichung

$$X + X' \cdot r = 1.$$

Ist ferner $(X + Y \cdot \sqrt{AB}) \cdot r$ ganz, so ist auch $X \cdot r$ ganz. Also hat $\mathfrak{K}_2$ die Eigenschaft $\mathfrak{LB}$, wenn $\mathfrak{K}_3$ diese Eigenschaft hat. Der Körper $\mathfrak{K}_2$ in III hat aber nach § 10 nicht die Eigenschaft $\mathfrak{LB}$.

Nimmt man in III für $\mathfrak{K}_2$ den Körper der rationalen Zahlen, für $\mathfrak{G}_2$ den Ring der ganzen rationalen Zahlen, und setzt man $A = 2$ und $B = -3$, so sind die Voraussetzungen in I ebenfalls erfüllt. Die Gleichung

$$2X^2 + 3Y^2 = \pm 1$$

ist in $\mathfrak{G}_2$ nicht lösbar. Also ist $\mathfrak{K}_3$ nicht vollständig. Wohl aber hat $\mathfrak{K}_3$, ebenso wie $\mathfrak{K}_2$, die Eigenschaft $\mathfrak{L}\mathsf{B}$. Daraus folgt der schon in der Zusammenstellung von § 7 benutzte Satz:

Es gibt Körper mit der Eigenschaft $\mathfrak{L}\mathsf{B}$, *die nicht die Eigenschaft* $\mathfrak{L}\mathsf{A}$ *haben.*

§ 12. Die Kroneckersche Theorie.

In § 10 und § 11 ist gezeigt worden, daß bei gewissen Erweiterungen eines Körpers Eigenschaften erhalten bleiben. Es ist aber auch möglich, daß man durch Übergang zu einem geeigneten Erweiterungskörper Eigenschaften gewinnt, die der gegebene Körper selbst nicht besitzt. Gelingt es, den Körper zu einem vollständigen Körper zu erweitern, so erhält man damit eine Übersicht über die Teilbarkeitsverhältnisse der Elemente des gegebenen Körpers, ebenso wie in § 4 durch die Dedekindsche Theorie, aber auf einem ganz anderen Wege. Die Möglichkeit einer solchen Erweiterung zu einem vollständigen Körper soll hier untersucht werden.

Man muß dabei aber noch verlangen, daß, wenn a und b zum gegebenen Körper $\mathfrak{K}_1$ gehören, dann und nur dann a im Erweiterungskörper $\mathfrak{K}_2$ durch b teilbar ist, wenn a in $\mathfrak{K}_1$ durch b teilbar ist. Mit anderen Worten: Man muß verlangen, daß ein Element $a : b$ von $\mathfrak{K}_1$ dann und nur dann nach der Erweiterung ein ganzes Element ist, wenn es vor der Erweiterung ein ganzes Element war. Bei Hinzufügung dieser Forderung wird die gestellte Aufgabe vollständig durch den Satz gelöst:

Dafür, daß der Körper $\mathfrak{K}_1$ *zu einem vollständigen Körper* $\mathfrak{K}_2$ *erweitert werden kann, in dem ein zu* $\mathfrak{K}_1$ *gehörendes Element dann und nur dann ganz ist, wenn es als Element von* $\mathfrak{K}_1$ *ganz ist, ist notwendig und hinreichend, daß* $\mathfrak{K}_1$ *ganz-abgeschlossen ist.*

Beweis: I. Die Bedingung ist notwendig. Denn ist $\mathfrak{K}_1$ nicht ganz-abgeschlossen, so gibt es in $\mathfrak{K}_1$ ein gebrochenes Element r, das einer Gleichung

$$r^n + A_1 r^{n-1} + \cdots + A_n = 0$$

mit ganzen Koeffizienten genügt. Ist im Erweiterungskörper $\mathfrak{K}_2$ das Element r auch gebrochen, und sind in $\mathfrak{K}_2$ die Elemente $A_1, \ldots, A_n$ auch ganz, so hat $\mathfrak{K}_2$ nicht die Eigenschaft $\mathfrak{L}\Delta$. Dann hat $\mathfrak{K}_2$ auch nicht die Eigenschaft $\mathfrak{V}\mathsf{A}$.

II. Die Bedingung ist hinreichend. Das zeigt der im folgenden konstruierte Körper $\mathfrak{K}_2$, wenn man für das willkürlich gelassene Idealsystem das System $\mathfrak{A}$ nimmt.

Sei $\mathfrak{K}_2$ *der Körper der rationalen Funktionen einer Unbestimmten* ξ *mit Koeffizienten aus dem Körper* $\mathfrak{K}_1$. *Der Körper* $\mathfrak{K}_1$ *habe in irgend einem Idealsystem die Eigenschaft* Γ. *Als ganz sollen die Elemente von* $\mathfrak{K}_2$ *gelten, welche so in der Form*

$$\frac{a_0 + a_1 \xi + \cdots}{a_0' + a_1' \xi + \cdots}$$

dargestellt werden können, daß im betrachteten Idealsystem

$$(a_0, a_1, \ldots)_1 \leqq (a_0', a_1', \ldots)_1$$

wird. Dann gilt:

1. *Ein Element von* $\mathfrak{K}_1$ *ist dann und nur dann in* $\mathfrak{K}_2$ *ganz, wenn es zu* $\mathfrak{G}_1$ *gehört.*
2. *Der Körper* $\mathfrak{K}_2$ *ist linear-vollständig.*

Beweis: I. Sei $\mathfrak{G}_2$ die Menge der Elemente von $\mathfrak{K}_2$, die als ganz bezeichnet werden sollen. Dann gehört jedes Polynom in ξ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{G}_1$ zu $\mathfrak{G}_2$. Denn es läßt sich in der Form

$$\frac{A_0 + A_1 \xi + \cdots}{1}$$

darstellen. Jedes Element von $\mathfrak{K}_2$ ist daher Quotient zweier Elemente von $\mathfrak{G}_2$.

II. Ist

$$\alpha = \frac{a_0 + a_1 \xi + \cdots}{a_0' + a_1' \xi + \cdots}$$

irgendeine Darstellung des Elementes α von $\mathfrak{G}_2$ als Quotient zweier Polynome in ξ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}_1$, so ist

$$(a_0, a_1, \ldots)_1 \leqq (a_0', a_1', \ldots)_1.$$

Denn durch Erweitern und Heben mit Polynomen läßt sich aus der gegebenen Darstellung eine solche herleiten, in der die Ungleichung gilt. Ist nun

$$(a_0 + a_1 \xi + \cdots) \cdot (b_0 + b_1 \xi + \cdots) = c_0 + c_1 \xi + \cdots$$
$$(a_0' + a_1' \xi + \cdots) \cdot (b_0 + b_1 \xi + \cdots) = c_0' + c_1' \xi + \cdots,$$

so ist nach dem Gauß-Kronecker-Dedekindschen Satze

$$(a_0, a_1, \ldots)_1 \cdot (b_0, b_1, \ldots)_1 = (c_0, c_1, \ldots)_1$$
$$(a_0', a_1', \ldots)_1 \cdot (b_0, b_1, \ldots)_1 = (c_0', c_1', \ldots)_1.$$

Aus

$$(a_0, a_1, \ldots)_1 \leqq (a_0', a_1', \ldots)_1$$

folgt also

$$(c_0, c_1, \ldots)_1 \leqq (c_0', c_1', \ldots)_1.$$

Auch der umgekehrte Schluß ist richtig, da $\mathfrak{K}_1$ die Eigenschaft Γ hat.

III. Die Menge $\mathfrak{G}_2$ ist ein Ring. Denn $\mathfrak{G}_2$ enthält das Element 1. Sind weiter α und β Elemente von $\mathfrak{G}_2$, und bringt man α und β auf denselben Nenner:

$$\alpha = \frac{a_0 + a_1 \xi + \cdots}{c_0 + c_1 \xi + \cdots} \qquad \beta = \frac{b_0 + b_1 \xi + \cdots}{c_0 + c_1 \xi + \cdots},$$

so ist nach II

$$(a_0, a_1, \ldots)_1 \leqq (c_0, c_1, \ldots)_1 \qquad (b_0, b_1, \ldots)_1 \leqq (c_0, c_1, \ldots)_1.$$

Daraus folgt

$$(a_0 \pm b_0, a_1 \pm b_1, \ldots)_1 \leqq (c_0, c_1, \ldots)_1.$$

Also gehören $\alpha + \beta$ und $\alpha - \beta$ zu $\mathfrak{G}_2$. Schließlich ist

$$(a_0, a_1, \ldots)_1 \cdot (b_0, b_1, \ldots)_1 \leqq (c_0, c_1, \ldots)_1 \cdot (c_0, c_1, \ldots)_1,$$

woraus nach dem Gauß-Kronecker-Dedekindschen Satze folgt, daß $\alpha \cdot \beta$ zu $\mathfrak{G}_2$ gehört.

IV. Das Element a von $\mathfrak{K}_1$ gehört nur dann zu $\mathfrak{G}_2$, wenn es zu $\mathfrak{G}_1$ gehört. Denn nach II muß, da a in der Form $\frac{a}{1}$ darstellbar ist, $(a)_1 \leqq (1)_1$ sein.

V. Der Körper $\mathfrak{K}_2$ ist linear-vollständig. Denn sind α und β zwei Elemente von $\mathfrak{K}_2$, so bringe man sie auf denselben Nenner:

$$\alpha = \frac{a_0 + a_1 \xi + \cdots}{c_0 + c_1 \xi + \cdots} \qquad \beta = \frac{b_0 + b_1 \xi + \cdots}{c_0 + c_1 \xi + \cdots}.$$

Wählt man n größer als den höchsten im Zähler von α auftretenden Exponenten von ξ, so ist

$$\delta = \alpha + \xi^n \cdot \beta = \frac{a_0 + a_1 \xi + \cdots + b_0 \xi^n + b_1 \xi^{n+1} + \cdots}{c_0 + c_1 \xi + \cdots}$$

ein gemeinsamer Teiler von α und β. Das folgt aus

$$(a_0, a_1, \ldots)_1 \leqq (a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots)_1$$
$$(b_0, b_1, \ldots)_1 \leqq (a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots)_1.$$

Die unter IV bewiesene Eigenschaft läßt noch eine Verallgemeinerung zu:

Sind $a_1, a_2, \ldots, a_n$ Elemente von $\mathfrak{K}_1$, so enthält das Ideal $(a_1, a_2, \ldots, a_n)_2$ des Systems $\mathfrak{V}$ aus dem Körper $\mathfrak{K}_1$ genau die Elemente, welche zu dem Ideal $(a_1, a_2, \ldots, a_n)_1$ des gegebenen Systems gehören.

Beweis: Das Ideal $(a_1, a_2, \ldots, a_n)_2$ besteht aus den Vielfachen des größten gemeinsamen Teilers

$$\delta = a_1 + a_2\,\xi + \cdots + a_n\,\xi^{n-1}$$

von $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in $\mathfrak{K}_2$. Das Element b von $\mathfrak{K}_1$ gehört also dann und nur dann zu ihm, wenn

$$\frac{b}{\delta} = \frac{b}{a_1 + a_2\,\xi + \cdots + a_n\,\xi^{n-1}}$$

ganz ist. Dafür ist nach II

$$(b)_1 \leqq (a_1, a_2, \ldots, a_n)_1$$

notwendig und hinreichend.

Von dem Erweiterungskörper, der gebildet werden sollte, wurde verlangt, daß ein Element des gegebenen Körpers dann und nur dann in ihm ganz sein sollte, wenn es vor der Erweiterung ganz war. Man kann aber auch noch weitergehende Forderungen stellen. In einem Falle wird dann die Aufgabe wieder durch den konstruierten Körper gelöst:

Dafür, daß der Körper $\mathfrak{K}_1$ zu einem vollständigen Körper $\mathfrak{K}_2$ erweitert werden kann, in dem ein Element b von $\mathfrak{K}_1$ dann und nur dann ein Vielfaches des größten gemeinsamen Teilers der Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_n$ von $\mathfrak{K}_1$ ist, wenn b in einem vorgegebenen Idealsystem zu $(a_1, a_2, \ldots, a_n)_1$ gehört, ist notwendig und hinreichend, daß das gegebene Idealsystem die Eigenschaft Γ hat.

Beweis: I. Die Bedingung ist notwendig. Denn sind α und γ die größten gemeinsamen Teiler von $a_1, a_2, \ldots$ und $c_1, c_2, \ldots$ in $\mathfrak{K}_2$, so ist $\alpha \cdot \gamma$ größter gemeinsamer Teiler der Elemente $a_i c_j$. Ist nun

$$(a_1, a_2, \ldots)_1 \cdot (c_1, c_2, \ldots)_1 \geqq (c_1, c_2, \ldots)_1,$$

so gehört jedes Element c_k zu $(\ldots, a_i\,c_j, \ldots)_1$, ist also durch $\alpha \cdot \gamma$ teilbar. Dann ist auch der größte gemeinsame Teiler γ der c_k durch $\alpha \cdot \gamma$ teilbar. Wenn $\gamma \neq 0$ ist, folgt daraus, daß 1 ein Vielfaches von α ist, also 1 dem Ideale $(a_1, a_2, \ldots)_1$ angehört. Der Körper $\mathfrak{K}_1$ hat demnach die Eigenschaft Γ.

II. Die Bedingung ist hinreichend. Man nehme den konstruierten Erweiterungskörper $\mathfrak{K}_2$ von $\mathfrak{K}_1$.

Eingegangen 8. April 1931.

Über die Eigenwerte gewisser nichtlinearer Differentialgleichungen.

Von *A. Hammerstein* in Berlin.

§ 1. Fragestellung.

Die vorliegende Arbeit bezweckt ein Analogon zur Eigenwerttheorie der linearen gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung für die nichtlineare Gleichung

$$y'' = \lambda f(x, y, y'), \qquad y(0) = y(1) = 0 \tag{1}$$

aufzustellen, unter gewissen Voraussetzungen über $f(x, y, y')$. Die Aufgabe (1) besitzt bekanntlich für alle hinreichend kleinen Werte von λ eine Lösung. Von einem Eigenwert $\lambda = \lambda_n$ wird man sinngemäß jedoch nur dann sprechen, wenn die Gleichung für alle λ die Lösung $y \equiv 0$ hat (Analogon zur homogenen linearen Gleichung), und wenn für $\lambda = \lambda_n$ eine nicht identisch verschwindende Lösung vorhanden ist. Deshalb setzen wir $f(x, y, y')$ in der Form $y \cdot g(x, y, y')$ an, wobei die Funktion $g(x, y, y')$ für $0 \leqq x \leqq 1$ und alle y und y' stetig sein soll.

Im Sonderfall, daß $g(x, y, y')$ die Ableitung y' nicht enthält, und in eine nach y fortschreitende Potenzreihe entwickelt werden kann, folgt unter gewissen einschränkenden Konvergenzvoraussetzungen die Existenz eines Eigenwertes aus einem Satz von Lichtenstein [1]) über die der Aufgabe entsprechende nichtlineare Integralgleichung.

Schon im Fall der linearen Gleichung

$$y'' = \lambda \varrho(x) y$$

liegen verwickeltere Verhältnisse vor, wenn $\varrho(x)$ im Intervall $\langle 0, 1 \rangle$ das Zeichen wechselt. Darum wollen wir uns hier darauf beschränken, daß $g(x, y, y')$ für $0 \leqq x \leqq 1$ alle y und y' über einer positiven Konstanten liegt. Ein den Anwendungen entnommenes Beispiel dieses Typus ist die Gleichung der Knickfestigkeitslehre

$$y'' = \lambda y (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}, \qquad y(0) = y(1) = 0. \tag{2}$$

Die Forderung, daß die Lösung nicht identisch verschwindet, kann man im linearen Fall durch Normierung erreichen oder aber dadurch ersetzen, daß man die Anfangsrichtung vorschreibt, also die Lösung den drei Bedingungen

$$y(0) = 0, \qquad y(1) = 0, \qquad y'(0) = a$$

bei vorgegebenem konstantem a unterwirft. Gegenüber diesen Bedingungen weist nun die nichtlineare Gleichung ein ganz ähnliches Verhalten auf. Es gilt nämlich der Satz:

---

[1]) Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen. Kap. IV. § 1, 2.

Für $0 \leqq x \leqq 1$ *und alle* y, y' *sei* $g(x, y, y')$ *stetig und* $g(x, y, y') \geqq g_1 > 0$. *Besitzt die Differentialgleichung*

$$y'' = \lambda y g(x, y, y')$$

für jedes λ *und* a *genau eine in* λ *und im ganzen Intervall* $0 \leqq x \leqq 1$ *stetige mit stetiger erster Ableitung versehene Lösung* $y(x, a, \lambda)$ *der Anfangswertaufgabe* $y(x_1) = 0$, $y'(x_1) = a$ $(0 \leqq x_1 \leqq 1)$, *so gibt es zu jedem festen* a *unendlich viele negative Eigenwerte* $\lambda = \lambda_n(a)$ *derart, daß die zugehörige Lösung, die Eigenfunktion* $y_n(x, a)$, *den Bedingungen genügt:*

$$y_n'' = \lambda_n y_n g(x, y_n y_n'),$$

$$y_n(0) = 0, \quad y_n(1) = 0, \quad y_n'(0) = a.$$

Der Unterschied dieses Resultates gegenüber dem linearen Fall liegt in folgendem:

Erstens muß vorausgesetzt werden, daß sich die Lösung der Anfangswertaufgabe über das ganze Intervall fortsetzen läßt. (Man kann nämlich, im Gegensatz zum linearen Fall, ein Beispiel angeben, wo dies nicht möglich ist.)

Zweitens hängen die Eigenwerte von a ab.

In § 3 wird das Verhalten der Eigenwerte für die spezielle Gleichung

$$y'' = \lambda y P(y'^2),$$

welche die Gleichung der Knickfestigkeitslehre als Sonderfall enthält, eingehender untersucht.

§ 2. Die Eigenwerte von $y'' = \lambda y g(x, y, y')$.

1. Der in § 1 ausgesprochene Satz ist leicht zu beweisen. Unmittelbar leuchtet ein, daß kein positives λ Eigenwert sein kann, denn für jede den Randbedingungen genügende Lösung ist

$$\int_0^1 y y'' dx = -\int_0^1 y'^2 dx = \lambda \int_0^1 y^2 g\, dx,$$

also $\lambda < 0$ wegen $g > g_1 > 0$.

Unter $y(x, a, \lambda)$ werde bei beliebigem $\lambda < 0$ die Lösung der Anfangswertaufgabe $y(0, a, \lambda) = 0$, $y'(0, a, \lambda) = a$ der vorgelegten Gleichung verstanden, die sich nach der Annahme mit ihrer ersten Ableitung stetig über das Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ fortsetzen läßt. Alle etwa vorhandenen Nullstellen von $y(x, a, \lambda)$ sind für $a \neq 0$ einfach, da aus $y(x_1) = 0$ $y'(x_1) = 0$ gemäß der eindeutigen Lösbarkeit der Differentialgleichung folgt $y \equiv 0$. Ferner können sie sich im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ nicht häufen, da für einen Häufungspunkt $y = 0$ und $y' = 0$ wäre. Jedes solche $y(x, a, \lambda)$ ist auch Lösung einer linearen Differentialgleichung

$$y'' + \varrho(x) y = 0,$$

wo

$$\varrho(x) = -\lambda g(x, y(x, a, \lambda),\ y'(x, a, \lambda))$$

gesetzt ist. Dabei gilt $\varrho(x) \geqq -\lambda g_1$.

Somit gibt es nach bekannten Sätzen Nullstellen von $y(x, a, \lambda)$, deren Abstand höchstens $\frac{\pi}{\sqrt{-\lambda g_1}}$ beträgt. Da dieselben einfach sind und $y(x, \lambda)$ sich stetig in λ ändert, folgt nun, daß sie stetig mit λ rücken. Für ein festes λ fallen höchstens endlich viele Nullstellen in das Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ hinein. Läßt man jetzt λ über alle Grenzen wachsen, so rückt der Abstand von je zwei Nullstellen gegen 0, und also wächst auch die Anzahl der im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ enthaltenen Nullstellen unbegrenzt. Zufolge der stetigen Änderung dieser einfachen Nullstellen mit λ erschließt man hieraus,

in üblicher Weise, daß unendlich oft eine auf den Punkt 1 fällt, was jeweils Anlaß zu einer Eigenfunktion ($y(0) = 0$, $y(1) = 0$) gibt. Damit ist der Satz bewiesen.

2. Es soll jetzt ein Beispiel einer Differentialgleichung, für welche sich nicht sämtliche Lösungen über ein gegebenes Intervall fortsetzen lassen, gegeben werden. Man wähle ξ, η, y_m den Bedingungen gemäß

$$\eta > \xi > 0, \qquad 2(\eta - \xi)^{\frac{3}{2}} < y_m$$

und setze

$$\varphi(x) = (x + 2\eta - 3\xi)\sqrt{\eta - x} - 2(\eta - \xi)^{\frac{3}{2}} + y_m,$$

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi''(\xi)}{\varphi(\xi)\,(1 + \varphi'(\xi)^2)^{\frac{3}{2}}} & \text{für } x \leqq \xi \\ \dfrac{\varphi''(x)}{\varphi(x)(1 + \varphi'(x)^2)^{\frac{3}{2}}} & \text{für } \xi < x < \eta \\ \dfrac{\varphi''(\eta)}{\varphi(\eta)(1 + \varphi'(\eta)^2)^{\frac{3}{2}}} & \text{für } \eta \leqq x\,. \end{cases}$$

Wie leicht ersichtlich, ist $h(x)$ stetig und durchweg positiv.

Man betrachte nun diejenige Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) = h(x)\,y(x)\,(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}},$$

welche den Anfangsbedingungen $y(\xi) = y_m$, $y'(\xi) = 0$ genügt. Wie in § 3 sogleich allgemeiner gezeigt wird, folgt, daß sie für $x < \xi$ monoton mit x nach 0 abnimmt. Für $\xi < x < \eta$ hat sie offenbar den Wert $\varphi(x)$. Nähert sich x dem Punkt η, so rückt $\varphi(x)$ monoton abnehmend gegen einen positiven Grenzwert, während $\varphi'(x)$ gegen $-\infty$ geht. Damit ist eine Lösung aufgewiesen, die sich nicht mit stetiger Ableitung über η hinaus fortsetzen läßt.

§ 3. Die Eigenwerte von $y'' = \lambda y P(y'^2)$.

1. Im folgenden sollen die Eigenwerte unter der speziellen Annahme $g(x, y, y') = P(y'^2)$, wobei $P(y'^2) \geqq P_0 > 0$ ist, näher untersucht werden. Dieser Typ enthält die genannte Gleichung der Knickfestigkeitslehre. Im Gegensatz zu dem vorangehenden Beispiel, in welchem zu $P(y'^2) = (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}$ nur der stetige Faktor $h(x)$ hinzutritt, ist hier jede Lösung der Anfangswertaufgabe beliebig weit fortsetzbar. Es gilt nämlich der Satz:

Für $z \geqq 0$ sei die Funktion $P(z)$ eindeutig erklärt und genüge in jedem Intervall einer Lipschitzbedingung. Ferner sei $P(z) \geqq P_0 > 0$. Dann besitzt die Differentialgleichung

$$y'' = \lambda y P(y'^2)$$

für jedes $\lambda < 0$ und reelles a eine der Anfangsbedingungen $y(0) = 0$, $y'(0) = a$ genügende periodische Lösung mit stetigen Ableitungen erster und zweiter Ordnung.

Beweis: Da zugleich mit $y(x)$ auch $-y(x)$ Lösung der Gleichung ist, genügt es offenbar den Fall $a > 0$ zu betrachten. Ferner kann man sich, weil die Spiegelung $-y(-x)$ einer für $x \geqq 0$ gefundenen Lösung wieder eine Lösung ist, auf nicht negatives x beschränken.

Sei $a > 0$ gegeben. Dann liefert die Methode der sukzessiven Approximationen in einem Intervall $0 \leqq x \leqq h_1$ eine den Anfangsbedingungen genügende Lösung. Dabei ist für genügend kleines x zufolge von $a > 0$ zunächst $y'(x) > 0$, und $y(x)$ wächst

monoton, während $y''(x)$ wegen $\lambda < 0$, $P > 0$ negativ ausfällt; $y'(x)$ nimmt also monoton von a beginnend ab. Ferner gilt

$$y(x) = \int_0^x y'(\xi)\,d\xi \leqq x\,a. \tag{3}$$

Wird nun der Wert $y'(x) = 0$ auf der Strecke $0 \leqq x \leqq h_1$ nicht erreicht, so kann die Lösung mit stetigen Ableitungen erster und zweiter Ordnung über ein Intervall $h_1 \leqq x \leqq h_2$ fortgesetzt werden, in dem man $y(h_1)$, $y'(h_1)$ als neue Anfangswerte wählt. Wird auch in diesem Intervall der Wert $y'(x) = 0$ noch nicht angenommen, so wird das Verfahren wiederholt, u. s. f.

Jedenfalls muß nach endlich vielen Schritten eine Stelle ξ erreicht sein, für welche $y'(\xi) = 0$ ist und $y(\xi)$ einen endlichen positiven Wert hat. In der Tat, wäre dies nicht der Fall, so würde das obige Verfahren eine Folge von Punkten $h_1, h_2, h_3, \ldots$ liefern. Diese können sich nicht gegen einen endlichen Wert h, über den hinaus $y(x)$ nicht mehr fortsetzbar ist, häufen, da ja sonst das monotone $y(x)$ nach (3) stetig gegen einen Grenzwert $\leqq ha$, und $y'(x)$ abnehmend gegen einen Grenzwert $\geqq 0$ konvergieren würde, auf welche, als Anfangswerte betrachtet, wieder die sukzessiven Approximationen anwendbar wären.

Die Werte $h_1, h_2, h_3, \ldots$ können aber auch nicht über alle Grenzen wachsen. Um dies einzusehen, wähle man $\eta > 0$ fest. Der Mittelwertsatz liefert dann für $x > \eta$

$$0 \leqq y(x) - y(\eta) = (x-\eta)y'(\eta) + \frac{(x-\eta)^2}{2}\lambda y(\tilde{x})\,P(y'(\tilde{x})^2), \qquad \eta < \tilde{x} < x.$$

Solange also $y(x)$ monoton wächst, gilt

$$y'(\eta) \geqq (x-\eta)\frac{-\lambda}{2}y(\eta)\,P_0,$$

$$x \leqq \frac{2y'(\eta)}{-\lambda y(\eta)\,P_0} + \eta,$$

d. h. $y'(x)$ muß für ein dieser Ungleichung genügendes x bereits verschwunden sein.

Die Lösung $y(x, a, \lambda)$ ist somit nach bekannten Sätzen bis zur Stelle $x = \xi$ $(y'(\xi) = 0)$ eine stetige Funktion von a und λ.

Im Intervall $\xi \leqq x \leqq 2\xi$ wird $y(x)$ durch $y(2\xi - x)$ fortgesetzt, im Intervall $2\xi \leqq x \leqq 4\xi$ durch $-y(4\xi - x)$. Von da ab geschieht die Fortsetzung periodisch mit der Periode 4ξ. Die Behauptung ist damit bewiesen.

Zu jedem $\lambda < 0$ und $a > 0$ gibt es also eine Lösung $y(x, a, \lambda)$, die stetig von a und λ abhängt und die unendlich viele einfache Nullstellen $x_1 = 2\xi$, $x_n = n\,x_1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ besitzt. Nach bekannten Schlüssen ändern sich diese stetig mit a und λ. Ferner ist stets $|\,y'(x, a, \lambda)\,| \leqq a$. Für die Lage der Nullstellen $x_n(a, \lambda)$ gilt folgende Abschätzung:

Es bezeichne P_a das Maximum von $P(z^2)$ für $0 \leqq z \leqq a$. Dann ist

$$\frac{n\pi}{\sqrt{-\lambda P_a}} \leqq x_n(a, \lambda) \leqq \frac{n\pi}{\sqrt{-\lambda P_0}}. \tag{4}$$

Das Gleichheitszeichen steht dann und nur dann, wenn $P(z)$ konstant, d. h. die Gleichung linear ist.

Beweis: Sei $y(x, a, \lambda)$ die zu gegebenem a und λ gehörige Lösung. Setzt man

$$-\lambda P(y'(x, a, \lambda)^2) = \varrho(x),$$

so ist offenbar für alle x

$$-\lambda P_0 \leqq \varrho(x) \leqq -\lambda P_a, \tag{5}$$

wobei die Gleichheit nur im Falle eines konstanten $P(z)$ für alle x gilt. $y(x, a, \lambda)$ ist somit die der Anfangsbedingung $y(0) = 0$, $y'(0) = a$ genügende Lösung der linearen Differentialgleichung

$$y'' + \varrho(x)y(x) = 0.$$

Nach einem bekannten Satz über lineare Differentialgleichungen folgt aber aus (5) für die erste Nullstelle $x_1(a, \lambda)$

$$\frac{\pi}{\sqrt{-\lambda P_a}} \leqq x_1(a, \lambda) \leqq \frac{\pi}{\sqrt{-\lambda P_0}},$$

woraus sich durch Multiplikation mit n die Behauptung ergibt.

Hieraus kann man jetzt über das Resultat von § 2 hinausgehend folgern:

Die Differentialgleichung

$$y'' = \lambda y P(y'^2)$$

hat stets unendlich viele Eigenfunktionen, d. h. den Bedingungen

$$y(0) = 0, \qquad y(1) = 0, \qquad y'(1) = a$$

genügende Lösungen, worunter solche mit keiner, einer, zwei usf. Nullstellen im Innern des Intervalls $< 0, 1 >$ *vorkommen.*

In der Tat, läßt man $-\lambda$ bei festem positiven a, mit einem hinreichend kleinen Wert beginnend, über alle Grenzen wachsen, so folgt aus den Abschätzungen (4), daß jede Nullstelle durch den Punkt 1 hindurchrücken muß, wodurch der Reihe nach Eigenfunktionen mit keiner, einer, zwei, drei usf. Nullstellen entstehen.

Für die Abhängigkeit der Eigenwerte vom Anfangswert a gilt:

Wird das Minimum P_0 *von* $P(z)$ *für* $z = 0$ *angenommen, so sind die Eigenwerte nur im Falle eines konstanten* $P(z)$, *d. h. der linearen Gleichung, von* a *unabhängig.*

Ist nämlich ein Eigenwert λ von a unabhängig, so hat eine Nullstelle von $y(x, a, \lambda)$ zu diesem λ für alle a den Wert 1. Zufolge ihrer stetigen Änderung mit a, und da keine zwei Nullstellen zusammenrücken können, muß dies aber immer ein- und dieselbe sein, z. B. $x_m(a, \lambda) = 1$. Es müßte also $x_m(a, \lambda)$ den konstanten Wert $\frac{m\pi}{\sqrt{-\lambda P_0}} = 1$ haben, wie man aus (4) zufolge von $P_a \to P_0$ für $a \to 0$ erkennt. Dies ist aber, wie bemerkt, nur bei konstantem $P(z)$ möglich.

Weiter kann aus (4) eine *Abschätzung für die Eigenwerte* entnommen werden.

Da nämlich für einen Eigenwert λ stets $x_n(a, \lambda) = 1$ gilt, folgt

$$\frac{n\pi}{\sqrt{-\lambda P_a}} \leqq 1 \leqq \frac{n\pi}{\sqrt{-\lambda P_0}},$$

und also

$$\frac{n^2\pi}{P_a} \leqq -\lambda \leqq \frac{n^2\pi^2}{P_0}.$$

Wird wieder $P(0) = P_0$ *vorausgesetzt, so ergibt sich, daß die Eigenwerte im Limes* $a \to 0$ *von links gegen* $\frac{n^2\pi^2}{P_0}$ *konvergieren.*

Insbesondere für die Gleichung der Knickfestigkeitslehre ($P(z^2) = (1 + z^2)^{\frac{3}{2}}$) hat man also

$$\frac{n^2\pi^2}{(1 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \leqq -\lambda \leqq n^2\pi^2.$$

2. Läßt man die Bedingung $y'(0) = a$ fallen und fragt nur nach nicht identisch verschwindenden Lösungen, welche den Randbedingungen

$$y(0) = 0, \qquad y(1) = 0$$

genügen, so gibt es deren natürlich unendlich viele. Es entsteht nun die Frage, ob solche für jedes λ vorhanden sein können.

Sie wird durch den Satz beantwortet:

Die Funktion $P(z)$ sei für $z \geqq 0$ stetig, monoton wachsend und genüge in der Umgebung einer jeden Stelle einer Lipschitzbedingung. Weiter sei $P(z) \geqq P_0 > 0$. Außerdem möge eine den Ungleichungen $0 < \sigma < \frac{1}{2}$ genügende Zahl σ, sowie zwei positive Konstanten C_1 und C_2 derart existieren, daß für genügend große z

$$C_1 < \frac{P(z)}{z^\sigma} < C_2 \tag{6}$$

ist. Dann besitzt die Gleichung

$$y'' = \lambda y P(y'^2)$$

bei beliebigem $\lambda < 0$ unendlich viele verschiedene den Bedingungen $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ genügende Lösungen.

Ein Beispiel ist etwa die Differentialgleichung

$$y'' = \lambda y \sqrt[3]{1 + y'^2}\,.$$

Beweis: Zum Beweis wird gezeigt, daß bei vorgegebenem λ unendlich viele Anfangswerte a so gewählt werden können, daß die Lösung $y(x, a)$ mit den Anfangsbedingungen $y(0, a) = 0$, $y'(0, a) = a$ durch den Punkt 1 hindurchgeht.

Sei also λ fest gegeben und a zunächst beliebig. Man bestimme ξ_1 aus der Gleichung $y'(\xi_1) = \frac{a}{2}$; da y' von a monoton nach 0 abnimmt, gibt es genau ein solches ξ_1, für welches $0 < \xi_1 < \xi$ gilt, wenn ξ wieder die erste positive Nullstelle von $y'(x)$ bedeutet.

Dann folgt aus der Differentialgleichung

$$y'(\xi_1) - y'(0) = \lambda \int_0^{\xi_1} y P(y'^2)\, dx$$

$$\frac{a}{2} = -\lambda \int_0^{\xi_1} y P(y'^2)\, dx. \tag{7}$$

Zufolge der Monotonie von y und y' für $0 \leqq x \leqq \xi$ ist dort

$$y(x) \geqq x y'(x).$$

Die Abschätzung des Integrals (7) nach oben und unten liefert somit

$$-\lambda \xi_1^2 y'(\xi_1)\, P(y'(\xi_1)^2) \leqq \frac{a}{2} \leqq -\lambda \xi_1 y(\xi_1)\, P(a^2).$$

Daraus folgt in Rücksicht auf (6) für genügend großes a

$$-\lambda \xi_1^2 \frac{a}{2} C_1 \left(\frac{a}{2}\right)^{2\sigma} \leqq \frac{a}{2} \leqq -\lambda \xi_1 y(\xi_1)\, C_2 a^{2\sigma},$$

$$\xi_1 \leqq C_3 a^{-\sigma}$$

und

$$y(\xi_1) \geqq C_4 a^{1-\sigma}, \tag{8}$$

wo wie auch im folgenden $C_3, C_4, C_5, \ldots$ von a unabhängige Konstanten sind.

Unter τ sei jetzt eine den Ungleichungen $\frac{1}{2} < \tau < 1 - \sigma$ unterworfene Zahl verstanden. ξ_2 bestimme man aus

$$y'(\xi_2) = a^\tau, \qquad 0 < \xi_2 < \xi.$$

Für hinreichend große a ist $\xi_2 > \xi_1$. Weiter liefert die Differentialgleichung

$$y'(\xi_2) - y'(\xi_1) = \lambda \int_{\xi_1}^{\xi_2} y\, P(y'^2)\, dx$$

$$\frac{a}{2} \geqq -\lambda(\xi_2 - \xi_1)\, y(\xi_1)\, P(a^{2\tau}).$$

Somit ist nach (6) und (8)

$$\xi_2 - \xi_1 \leqq C_5\, a^{\sigma(1-2\tau)}.$$

Endlich ist

$$y'(\xi) - y'(\xi_2) = \lambda \int_{\xi_2}^{\xi} y\, P(y'^2)\, dx,$$

$$a^\tau \geqq -\lambda(\xi - \xi_2)\, y(\xi_1)\, P_0,$$

$$\xi - \xi_2 \leqq C_6\, a^{\tau+\sigma-1}.$$

Daher gilt für die erste Nullstelle x_1 von $y(x, a)$ bei genügend großem a

$$x_1 = 2\xi = 2\,[(\xi - \xi_2) + (\xi_2 - \xi_1) + \xi_1],$$

$$x_1 \leqq 2C_6\, a^{\tau+\sigma-1} + 2C_5\, a^{\sigma(1-2\tau)} + 2C_3\, a^{-\sigma},$$

wobei die Exponenten von a gemäß den Festsetzungen über σ und τ sämtliche negativ sind. x_1 und also auch die n-te Nullstelle $x_n = nx_1$ rückt bei wachsendem a stetig in den Nullpunkt, woraus man wieder die Existenz unendlich vieler Lösungen der Randwertaufgabe für beliebiges $\lambda < 0$ erschließt, die jetzt alle verschiedene Anfangsrichtungen haben.

Eingegangen 17. Oktober 1931.

Über die Konstruktion der Schiefkörper, die von endlichem Rang in bezug auf ein gegebenes Zentrum sind.

Von *Richard Brauer* in Königsberg i. Pr.

Die Sätze von Herrn Maclagan Wedderburn gestatten, die Aufstellung aller halbeinfachen Systeme hyperkomplexer Größen über einem gegebenen Körper K auf die Konstruktion aller Divisionsalgebren Δ über K zurückzuführen. Diese Systeme Δ werden von denjenigen Schiefkörpern[1]) gebildet, die K im Zentrum enthalten und von endlichem Rang in bezug auf K sind. Offenbar bedeutet es dabei keine wesentliche Einschränkung, wenn man annimmt, daß K selbst das Zentrum von Δ ist. Mit der so entstehenden Aufgabe, alle Schiefkörper Δ von endlichem Rang über einem gegebenen Körper K aufzustellen, will sich die vorliegende Arbeit befassen; der Körper K wird dabei als vollkommen vorausgesetzt.

Die Aufgabe ist, wie sich zeigen wird, mit gewissen Fragen der „kommutativen" Algebra äquivalent; vielleicht dürften deshalb auch diese Untersuchungen dazu beitragen, die Untersuchungen der „nichtkommutativen" Algebra vom kommutativen Standpunkt aus interessant erscheinen zu lassen. In der Hauptsache handelt es sich um spezielle Probleme der folgenden Art: Gegeben ist ein Normalkörper $\mathsf{K}(\vartheta)$ über K mit der Galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}$, ferner eine endliche Gruppe $\mathfrak{H}$ und eine homomorphe Abbildung von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{G}$; kann man $\mathsf{K}(\vartheta)$ in einen Normalkörper $\mathsf{K}(\vartheta^*)$ über K derart einbetten, daß $\mathsf{K}(\vartheta^*)$ die Galoissche Gruppe $\mathfrak{H}$ in bezug auf K besitzt und die aus der Galoisschen Theorie wegen $\mathsf{K}(\vartheta) < \mathsf{K}(\vartheta^*)$ entspringende homomorphe Beziehung von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{G}$ gerade die gegebene Abbildung ist? Ob diese Frage zu bejahen oder zu verneinen ist, hängt natürlich ganz von den gegebenen Stücken ab. Wir wollen von einem „*Einbettungsproblem*" für den Normalkörper $\mathsf{K}(\vartheta)$ sprechen.

Zur Aufstellung der Schiefkörper Δ verwenden wir die Zerfällungskörper von Δ; das sind die maximalen, in vollständigen Matrixalgebren mit Koeffizienten aus Δ enthaltenen (kommutativen) Teilkörper[2]). Unter allen Zerfällungskörpern von Δ werden gewisse ausgezeichnet und als reguläre Zerfällungskörper bezeichnet; sie unterliegen unter anderem der Bedingung, Normalkörper über K zu sein. Es gibt dann nur endlich viele Schiefkörper Δ mit dem Zentrum K, die einen gegebenen Normalkörper $\mathsf{K}(\vartheta)$ als regulären Zerfällungskörper besitzen. Alle diese Δ lassen sich mit Hilfe von gewissen endlichen Gruppen $\mathfrak{H}$ kennzeichnen, die homomorph auf die Galoissche Gruppe $\mathfrak{G}$ von

[1]) Die Terminologie ist im folgenden anders wie in dem Buch: van der Waerden, Moderne Algebra, Berlin 1930/31. Die dort (Band 1, S. 40) als Körper bezeichneten Systeme bezeichnen wir als Schiefkörper, während wir das Wort Körper wie sonst meist üblich für die kommutativen Körper in der van der Waerdenschen Bezeichnungsweise reservieren.

[2]) Vgl. R. Brauer und E. Noether, Über minimale Zerfällungskörper irreduzibler Darstellungen, Sitzungsberichte d. Preußischen Akademie d. Wissensch. 1927, S. 221—228.

$\mathsf{K}(\vartheta)$ bezogen sind; allerdings kann derselbe Schiefkörper Δ dabei mehrfach auftreten. Wir untersuchen daher zunächst, welche der in dieser Weise festgelegten Schiefkörper mit K selbst übereinstimmen. Es zeigt sich (§ 4), daß dies dann und nur dann der Fall ist, wenn die Einbettungsfrage für $\mathsf{K}(\vartheta)$ und die betreffende Gruppe $\mathfrak{H}$ zu bejahen ist. Allgemeiner ergibt sich, daß zwei Schiefkörper Δ_1 und Δ_2, die mit Hilfe der regulären Zerfällungskörper $\mathsf{K}(\vartheta)$ bzw. $\mathsf{K}(\varrho)$ und gewisser endlicher Gruppen festgelegt sind, dann und nur dann isomorph sind, wenn eine bestimmte Einbettungsfrage für $\mathsf{K}(\vartheta, \varrho)$ zu bejahen ist; es handelt sich dabei immer um die Existenz gewisser in bezug auf den eingebetteten Körper relativ zyklischer Erweiterungskörper.

Die weiteren in diesem Zusammenhang entstehenden Fragen, z. B. ob ein gewisser Körper $\mathsf{K}(\alpha)$ Zerfällungskörper von Δ ist, hängen ebenfalls allein von Einbettungsfragen ab, ebenso die Bestimmung des Exponenten und des Index von Δ.

Abgesehen von gewissen Betrachtungen über Gruppen endlicher Ordnung hängt also die Bestimmung aller Δ nur von der Untersuchung gewisser Struktureigenschaften von algebraischen Körpern ab. Beschränkt man sich auf Δ von einem festen Rang m über K, so hat man dabei nur Gruppen heranzuziehen, deren Ordnung unter einer festen nur von m abhängigen Schranke liegt, so daß nur endlich viele Gruppen in Frage kommen. Ferner hat man nur Körper zu betrachten, deren Grad in bezug auf K ebenfalls unter einer allein von m abhängigen Schranke liegt.

Zum Schluß werden einige Beispiele behandelt. Vollständig erledigen kann man den Fall, daß K nur zyklische algebraische Erweiterungskörper besitzt (worin die bekannten Fälle der endlichen Körper und des Körpers aller reellen Zahlen eingeschlossen sind); hier gibt es entweder abgesehen von K selbst keine Schiefkörper mit dem Zentrum K, oder die Quaternionen bilden den einzigen derartigen Schiefkörper. Dieses Ergebnis erscheint bei uns in engem Zusammenhang mit Sätzen der Artin-Schreierschen Theorie der reellen Körper. — Ferner werden auch noch bei beliebigem K die einfachsten in Frage kommenden Gruppen $\mathfrak{H}$ behandelt.

§ 1. Über die Darstellung eines einfachen Systems als verschränktes Produkt.

K sei ein gegebener vollkommener Körper. Die Aufgabe, alle Schiefkörper endlichen Ranges über K als Zentrum aufzustellen, ist vollständig äquivalent mit der Aufgabe, alle Faktorensysteme in bezug auf K als Grundkörper zu bestimmen [3]). Es sei $c_{\alpha\beta\gamma}$ ein Faktorensystem, das etwa zu dem Körper $\mathsf{K}(\vartheta)$ vom Grad m über K gehört [4]). $\vartheta_1 = \vartheta$, $\vartheta_2, \ldots, \vartheta_m$ seien die Konjugierten zu ϑ; $\mathfrak{G}$ bezeichne die Galoissche Gruppe von $\mathsf{K}(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_m)$. Alle Indexpaare α, β $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m)$ zerfallen in Klassen von äquivalenten Paaren; dabei sollen α, β und γ, δ äquivalent heißen, wenn es in $\mathfrak{G}$ ein Element gibt, das ϑ_α in ϑ_γ, ϑ_β in ϑ_δ überführt. Diese Klassen seien mit $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_t$ bezeichnet und zwar sei $\mathfrak{K}_1$ die Klasse von 1, 1, die dann aus allen Paaren α, α besteht. In der Klasse $\mathfrak{K}_\tau$ mögen genau s_τ Paare α, β mit $\alpha = 1$ vorkommen; offenbar gibt es in $\mathfrak{K}_\tau$ auch gerade s_τ Paare, bei denen der erste Index einen beliebigen andern vorgeschriebenen Wert hat. Es gilt daher

$$m^2 = m \sum_{\tau=1}^{t} s_\tau .$$

Jeder Klasse $\mathfrak{K}_\tau$ ordnen wir eine Matrix

$$Z_\tau = (c_{\varkappa\lambda 1}^{-1}\, l_{\varkappa\lambda})$$

---

[3]) Vgl. R. Brauer, Über Systeme hyperkomplexer Größen, Math. Zeitschrift **30** (1929), S. 79—107. Diese Arbeit wird im folgenden mit H. zitiert.

[4]) m braucht hier nicht der genaue Index des Faktorensystems zu sein; dieser ist jedenfalls ein Teiler von m.

zu, wobei $l_{\varkappa\lambda}$ den Wert 1 oder 0 hat, je nachdem das Paar $\varkappa$, λ in der Klasse $\mathfrak{K}_\tau$ vorkommt oder nicht. Ferner setzen wir

$$T = \begin{pmatrix} \vartheta_1 & & & & \\ & \vartheta_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & \vartheta_m \end{pmatrix}.$$

Die m^2 Matrizen

$$(1) \quad T^\varrho Z_\tau T^\sigma \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, t;\ \varrho = 0, 1, 2, \ldots, m-1;\ \sigma = 0, 1, \ldots, s_\tau - 1)$$

bilden dann nach H. S. 107 eine Basis eines einfachen Systems hyperkomplexer Größen A über K, das das Faktorensystem c besitzt.

Jetzt sei $\mathsf{K}(\vartheta)$ Normalkörper über K; wenn man den ursprünglichen Körper $\mathsf{K}(\vartheta)$ durch einen geeigneten Erweiterungskörper ersetzt, kann man ja stets erreichen, daß diese Voraussetzung erfüllt ist. Offenbar hat dann für alle Klassen $\mathfrak{K}_\tau$ die Zahl s_τ denselben Wert 1, da ja ϑ_1 nur durch das Einheitselement von $\mathfrak{G}$ in sich übergeführt wird, ferner gilt $t = m$. In (1) kann man also den letzten Faktor T^σ weglassen. Die Elemente von A lassen sich dann eindeutig in der Form schreiben

$$\sum_{\tau=1}^{m} \varphi_\tau(T)\, Z_\tau,$$

wo die φ_τ Polynome von höchstens $(m-1)$-tem Grad mit Koeffizienten aus K bedeuten.

Die ganzen rationalen Funktionen $\varphi(T)$ von T mit Koeffizienten aus K bilden offenbar einen zu $\mathsf{K}(\vartheta)$ isomorphen Körper. Wir wollen daher $\varphi(T)$ mit der zugeordneten Größe $\varphi(\vartheta)$ von $\mathsf{K}(\vartheta)$ identifizieren. Zu beachten ist dabei aber, daß bei Multiplikation von $\varphi(T)$ mit einer Matrix Z_τ nicht das kommutative Gesetz gilt. Die Größen $\varkappa$ von K erscheinen mit den Matrizen $\varkappa E$ identifiziert, hier gilt Vertauschbarkeit mit Z_τ.

Es ist jetzt zweckmäßig, als Indizes die Elemente von $\mathfrak{G}$ zu verwenden. Ist λ eine Größe von $\mathsf{K}(\vartheta)$, G ein Element von $\mathfrak{G}$, so verstehen wir unter λ^G die aus λ durch Anwendung von G entstehende Größe. Die sämtlichen ϑ_α erhält man eindeutig in der Form ϑ^A, wenn A die ganze Gruppe $\mathfrak{G}$ durchläuft. Gilt für drei Indizes α, β, γ

$$\vartheta_\alpha = \vartheta^A, \qquad \vartheta_\beta = \vartheta^B, \qquad \vartheta_\gamma = \vartheta^C,$$

so setzen wir

$$c_{A,B,C} = c_{\alpha,\beta,\gamma}.$$

Nach den charakteristischen Eigenschaften für Faktorensysteme ist dann

$$(2) \quad \alpha)\ c_{A,A,B} = c_{A,B,B} = 1, \quad \beta)\ c^D_{A,B,C} = c_{AD,BD,CD}, \quad \gamma)\ c_{A,B,D}\, c_{B,C,D} = c_{A,C,D}\, c_{A,B,C}\ ^5)$$

für beliebige A, B, C, D aus $\mathfrak{G}$.

Da durch $\vartheta_\alpha = \vartheta^A$ jedem Index eineindeutig ein Gruppenelement zugeordnet ist, können wir die Gruppenelemente auch in den Matrizen Z_τ und T zur Bezeichnung der Zeilen und Spalten verwenden. Wir schreiben im folgenden diese Matrizen, indem wir das in der Zeile P, Spalte Q stehende Element angeben, wo P, Q zwei beliebige Gruppenelemente bedeuten. Wir setzen noch

$$e_{P,Q} = 0 \quad \text{für} \quad P \neq Q, \qquad e_{P,P} = 1.$$

---

[5]) Zum Nachweis, daß ein System von m^3 von 0 verschiedenen Größen $c_{A,B,C}$ aus $\mathsf{K}(\vartheta)$ ein Faktorensystem bilden, genügt es (2α) für $A = B = E$, (2β) für $C = E$ und (2γ) für $D = E$ nachzuweisen, da die allgemeinen Gleichungen (2) dann leicht folgen.

Dann wird die Größe λ von $\mathsf{K}(\vartheta)$ mit der Matrix

$$(\lambda^Q e_{P,Q}) \tag{3}$$

identifiziert. Zu jedem Element G von $\mathfrak{G}$ gehört eine Klasse von Indexpaaren, die aus allen Paaren GH, H für beliebige H aus $\mathfrak{G}$ besteht. Die zugehörige Matrix Z_τ, die wir jetzt auch mit Z_G bezeichnen, können wir dann schreiben

$$Z_G = (c^{-1}_{P,Q,E}\, e_{P,GQ}); \tag{4}$$

offenbar hat ja $e_{P,GQ}$ den Wert 1 oder 0, je nachdem das Paar P, Q der Klasse angehört oder nicht, entspricht also dem früheren $l_{\varkappa\lambda}$.

Bei diesen Festsetzungen können wir alle Elemente von A eindeutig in der Form schreiben

$$\alpha = \Sigma\, \lambda_G Z_G, \tag{5}$$

wo G die Gruppe $\mathfrak{G}$ durchläuft und die λ_G beliebige Größen aus $\mathsf{K}(\vartheta)$ sind. In der ersten Spalte ($Q = E$) von Z_G steht nur in der Zeile G eine von 0 verschiedene Größe und zwar 1 nach (2α). Ist λ eine Größe von $\mathsf{K}(\vartheta)$, so tritt in λZ_G nach (3) und (4) an die Stelle der 1 die Größe λ^G, während die Nullen ungeändert bleiben. In der ersten Spalte von (5) steht also in der Zeile G gerade $(\lambda_G)^G$, durch die erste Spalte ist mithin α eindeutig bestimmt.

Ist λ wieder eine Größe von $\mathsf{K}(\vartheta)$, so ist offenbar die erste Spalte von $Z_G \lambda^G$ mit der ersten Spalte von λZ_G identisch, also gilt

$$\lambda Z_G = Z_G \lambda^G. \tag{6}$$

Daraus folgt auch noch, daß man die Größen von A eindeutig in der Form schreiben kann

$$\alpha = \Sigma\, Z_G \mu_G, \tag{7}$$

wo die μ_G beliebige Größen aus $\mathsf{K}(\vartheta)$ bedeuten.

Jetzt soll die erste Spalte von $Z_G Z_H$ gebildet werden. Einen von Null verschiedenen Ausdruck erhält man bei Komposition der Zeile P von Z_G mit der ersten Spalte von Z_H nur, wenn in der betreffenden Zeile von Z_G in der Spalte H eine von 0 verschiedene Größe steht. Nach (4) gilt das nur für $P = GH$ und zwar steht dann dort $c^{-1}_{GH,H,E}$. Folglich steht in der ersten Spalte von $Z_G Z_H$ nur in der Zeile GH eine von Null verschiedene Größe und zwar $c^{-1}_{GH,H,E}$, genau ebenso wie in $Z_{GH} c^{-1}_{GH,H,E}$; also gilt

$$Z_G Z_H = Z_{GH}\, c^{-1}_{GH,H,E}. \tag{8}$$

Durch (6) und (8) ist gezeigt. in welcher Weise zwei Größen (7) zu multiplizieren sind. Systeme A von Größen (7), mit denen nach den Regeln (6) und (8) zu rechnen ist, sind zuerst von Herrn Dickson [6]) behandelt worden. A soll als *das zum Faktorensystem c gehörige verschränkte Produkt des Normalkörpers* $\mathsf{K}(\vartheta)$ *mit seiner Galoisschen Gruppe bezeichnet werden.* Durch $\mathsf{K}(\vartheta)$ und c ist dann A vollständig bestimmt. Wir haben gezeigt:

Satz 1[7]): *Zu jedem Schiefkörper gehören einfache Systeme*[8]), *die sich als verschränktes Produkt eines Normalkörpers mit seiner Galoisschen Gruppe schreiben lassen.*

---

[6]) Vgl. etwa L. E. Dickson, Algebren und ihre Zahlentheorie, Orell Füßli, Zürich 1927, Kapitel III.

[7]) Dieses Ergebnis ist in H. S. 107 angegeben, wo aber der hier ausgeführte Beweis nur skizziert wird. Ein anderer Beweis ist neuerdings von Frl. Noether angegeben worden. Von Frl. Noether stammt auch der Ausdruck verschränktes Produkt. — Man vergleiche ferner die Darstellung in der soeben erschienenen Arbeit von Herrn H. Hasse, Theory of cyclic algebras over an algebraic number field, Trans. Am. Math. Soc. **34** (1932), S. 171, § 10.

[8]) Wir sagen, daß ein einfaches System A zu dem Schiefkörper Δ gehört, wenn es einer vollständigen Matrixalgebra mit Koeffizienten aus Δ isomorph ist.

Dann und nur dann ist A selbst Schiefkörper, wenn der Grad von $\mathsf{K}(\vartheta)$ mit dem Index μ von c übereinstimmt. Ob es zu jedem c Zerfällungskörper des Grades μ gibt, die Normalkörper sind, ist nicht bekannt. Es ist also fraglich, ob jeder Schiefkörper sich selbst als verschränktes Produkt schreiben läßt.

§ 2. Reguläre Zerfällungskörper. Zuordnung einer endlichen Gruppe zu Δ.

Ersetzen wir eventuell $\mathsf{K}(\vartheta)$ noch einmal durch einen umfassenderen Normalkörper, so kann man annehmen, daß alle Zahlen des Faktorensystems c Einheitswurzeln sind [9]). Ist diese Voraussetzung bereits für $\mathsf{K}(\vartheta)$ erfüllt, so wollen wir $\mathsf{K}(\vartheta)$ einen *regulären Zerfällungskörper* für das Faktorensystem c und den zugehörigen Schiefkörper Δ nennen[10]).

$\mathsf{K}(\vartheta)$ sei jetzt ein regulärer Zerfällungskörper, das Faktorensystem c bestehe aus n-ten Einheitswurzeln. Dabei lassen wir auch zu, daß nur $\bar{n}$-te Einheitswurzeln mit $\bar{n} < n$ vorkommen; wir fordern nur, daß eine primitive n-te Einheitswurzel ε in $\mathsf{K}(\vartheta)$ vorkommt, was bei der kleinstmöglichen Wahl von n sicher der Fall ist, da alle $c_{\alpha\beta\gamma}$ zu $\mathsf{K}(\vartheta)$ gehören. Hat ferner K eine von Null verschiedene Charakteristik p, so dürfen wir $n \not\equiv 0 \pmod{p}$ annehmen [11]). Die Zahl n denken wir uns im § 2 festgehalten.

Die n-ten Einheitswurzeln bilden dann eine zyklische Gruppe $\mathfrak{N}$ der Ordnung n. Rechnet man mit den Elementen von $\mathfrak{N}$ und den Z_G nach den Gesetzen (6) und (8), so erhält man eine endliche Gruppe $\mathfrak{H}$ der Ordnung mn, da ja alle $c_{A,B,C}$ zu $\mathfrak{N}$ gehören. Es gilt

$$Z_A Z_B = Z_{AB} c_{AB,B,E}^{-1}, \qquad \varepsilon Z_A = Z_A \varepsilon^A, \qquad (A, B < \mathfrak{G}) \tag{9}$$

$\mathfrak{N}$ ist invariante Untergruppe von $\mathfrak{H}$. Die Z_A bilden ein vollständiges Restsystem von $\mathfrak{H}$ nach $\mathfrak{N}$, die Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{N}}$ ist nach (9) zu $\mathfrak{G}$ isomorph; durch die Zuordnung $Z_A \varepsilon^\nu \to A$ erscheint $\mathfrak{H}$ homomorph auf $\mathfrak{G}$ bezogen.

Sind zwei Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gegeben, so wollen wir eine Gruppe $\mathfrak{H}$ als *Erweiterung von $\mathfrak{A}$ mit Hilfe von $\mathfrak{B}$* bezeichnen, wenn $\mathfrak{H}$ eine zu $\mathfrak{A}$ isomorphe invariante Untergruppe $\mathfrak{A}^*$ besitzt, derart daß $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{A}^*}$ zu $\mathfrak{B}$ isomorph ist. Wir sehen dabei aber eine Erweiterung noch nicht als gegeben an, wenn $\mathfrak{H}$ als abstrakte Gruppe bekannt ist. Wir verlangen vielmehr erstens noch, daß *die Untergruppe $\mathfrak{A}^*$ eindeutig festgelegt* ist, unter Umständen kann ja $\mathfrak{H}$ verschiedene für $\mathfrak{A}^*$ in Betracht kommende Gruppen enthalten. Zweitens fordern wir noch, daß *die isomorphen Abbildungen von $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{A}^*}$ auf $\mathfrak{B}$ und von $\mathfrak{A}^*$ auf $\mathfrak{A}$ eindeutig gegeben sind*, auch hier können ja mehrere Möglichkeiten bestehen. Jedem Element H von $\mathfrak{H}$ ist dann homomorph ein eindeutig bestimmtes Element von $\mathfrak{B}$ zugeordnet, nämlich das der Nebengruppe $H\mathfrak{A}^*$ bei der isomorphen Abbildung von $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{A}^*}$ auf $\mathfrak{B}$ entsprechende Element; wir nennen es das *zu H gehörige Element von $\mathfrak{B}$*. Ist $\mathfrak{H}_1$ eine zweite Erweiterung von $\mathfrak{A}$ mit Hilfe von $\mathfrak{B}$, wobei anstelle von $\mathfrak{A}^*$ etwa $\mathfrak{A}_1^*$ tritt, so ergibt sich als Konsequenz aus unserer Festsetzung, daß wir $\mathfrak{H}_1$ nur dann als identisch mit $\mathfrak{H}$ ansehen dürfen, wenn

---

[9]) Vgl. R. Brauer, Untersuchungen über die arithmetischen Eigenschaften von Gruppen linearer Substitutionen, 1. Mitteilung, Math. Zeitschrift **28** (1928), S. 677—696, § 4. Diese Arbeit soll mit U. zitiert werden. Im folgenden § 6 wird diese Erweiterung genau untersucht, dort ergibt sich diese Tatsache noch einmal. — Man kann sogar erreichen, daß nur ν-te Einheitswurzeln vorkommen, wenn ν der Exponent von c ist. ν ist dabei sicher ein Teiler des Grades von $\mathsf{K}(\vartheta)$.

[10]) In § 5 wird diese Definition noch etwas abgeändert werden. Bei der vorläufigen Fassung kann $\mathsf{K}(\vartheta)$ noch bei unendlich vielen Δ als regulärer Zerfällungskörper auftreten, bei der späteren Fassung dagegen nicht.

[11]) Der Index eines Schiefkörpers ist dann sicher zu p teilerfremd.

es eine isomorphe Abbildung von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{H}_1$ mit folgenden Eigenschaften gibt: 1) Zu zugeordneten Elementen von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}_1$ gehört stets dasselbe Element von $\mathfrak{B}$; 2) Zwei Elemente der Untergruppe $\mathfrak{A}^*$ bzw. $\mathfrak{A}_1^*$ von $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{H}_1$ sind einander zugeordnet, wenn beiden in $\mathfrak{A}$ dasselbe Element entspricht. — Wir können ohne Gefahr einer Verwechslung $\mathfrak{A}^*$ direkt mit $\mathfrak{A}$ identifizieren. Wir haben dann gezeigt:

Satz 2: *Zu jedem Faktorensystem c, das* $\mathsf{K}(\vartheta)$ *als regulären Zerfällungskörper besitzt und etwa aus n-ten Einheitswurzeln besteht, gehört eine Erweiterung* $\mathfrak{H}$ *der zyklischen Gruppe* $\mathfrak{N}$ *der Ordnung n mit Hilfe der Galoisschen Gruppe* $\mathfrak{G}$ *von* $\mathsf{K}(\vartheta)$. *Werden die Elemente von* $\mathfrak{N}$ *mit den n-ten Einheitswurzeln identifiziert, so gilt für alle H aus* $\mathfrak{H}$ *die Gleichung* $\varepsilon H = H\varepsilon^G$, *wenn G das zu H gehörige Element von* $\mathfrak{G}$ *ist. Hat* K *die Charakteristik* $p \neq 0$, *so setzen wir dabei* $n \not\equiv 0 \pmod p$ *voraus. — Ist* Δ *Schiefkörper mit* $\mathsf{K}(\vartheta)$ *als regulärem Zerfällungskörper und ist n geeignet gewählt, so sind dadurch auch zu* Δ *Erweiterungen* $\mathfrak{H}$ *der genannten Form zugeordnet, eventuell aber nicht eindeutig* [12]).

Umgekehrt sei jetzt eine Erweiterung $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{N}$ mit Hilfe von $\mathfrak{G}$ gegeben, die die Bedingungen von Satz 2 erfüllt. Wir wählen ein Restsystem von $\mathfrak{H}$ nach $\mathfrak{N}$ und bezeichnen dabei das $G < \mathfrak{G}$ zugeordnete Element des Restsystems mit Z_G; Z_E können wir gleich E setzen. Dann gilt für beliebige Elemente A und B von $\mathfrak{G}$

$$Z_A Z_B = Z_{AB} r_{A,B}\,, \tag{10}$$

wo $r_{A,B}$ zu $\mathfrak{N}$ gehört. Ist D ein beliebiges Element von $\mathfrak{G}$, so setzen wir

$$c_{AB,B,E} = r_{A,B}^{-1}, \qquad c_{ABD,BD,D} = c_{AB,B,E}^{D}. \tag{11}$$

Dann ist also $c_{P,Q,R}$ für drei beliebige Elemente aus $\mathfrak{G}$ definiert; wir behaupten, man erhält so ein Faktorensystem. Zunächst ist $c_{P,Q,R}$ eine Größe aus $\mathsf{K}(\vartheta)$ und zwar eine n-te Einheitswurzel. Die zweite Gleichung (11) ergibt unmittelbar (2β) im Spezialfall $C = E$. Für $A = B = E$ folgt aus (10) $r_{A,B} = 1$, also (2α) im Spezialfall $A = B = E$. Schließlich folgt aus (10)

$$Z_P(Z_Q Z_R) = Z_P Z_{QR} c_{QR,R,E}^{-1} = Z_{PQR} c_{PQR,QR,E}^{-1} c_{QR,R,E}^{-1},$$
$$(Z_P Z_Q) Z_R = Z_{PQ}\, c_{PQ,Q,E}^{-1} Z_R = Z_{PQ}\, Z_R (c_{PQ,Q,E}^{-1})^R = Z_{PQR}\, c_{PQR,R,E}^{-1} (c_{PQ,Q,E}^{-1})^R.$$

Vergleich dieser beiden Gleichungen ergibt bei Berücksichtigung von (11)

$$c_{PQR,QR,E}\, c_{QR,R,E} = c_{PQR,R,E}\, c_{PQR,QR,R}.$$

Für $PQR = A$, $QR = B$, $C = R$, $D = E$ ergibt sich (2γ) im Spezialfall $D = E$. Nach [5]) bildet daher $c_{A,B,C}$ ein Faktorensystem.

Geht man oben umgekehrt von diesem Faktorensystem aus, so wird man wegen (10) und (11) gerade auf die Erweiterung $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{N}$ geführt.

Die Konstruktion von c aus $\mathfrak{H}$ ist nicht ganz eindeutig, man hat eine Freiheit bei der Auswahl des Restsystems von $\mathfrak{H}$ nach $\mathfrak{N}$. Die oben verwendeten Z_A kann man durch $Z_A k_A$ ersetzen, wo k_A ein beliebiges Element von $\mathfrak{N}$ ist, $(A \neq E)$. Wir setzen noch

$$k_A = k_{A,E}, \qquad (k_A)^B = k_{AB,B}, \qquad k_{E,E} = k_{B,B} = 1.$$

Das neue Restsystem besteht bei dieser Bezeichnung aus

$$Z_A^* = Z_A\, k_{A,E}\,.$$

Dann folgt aus (9)

$$Z_A^* Z_B^* = Z_A k_{A,E} Z_B k_{B,E} = Z_A Z_B k_{A,E}^B k_{B,E} = Z_{AB} c_{AB,B,E}^{-1} k_{AB,B} k_{B,E}\,,$$
$$Z_A^* Z_B^* = Z_{AB}^* c_{AB,B,E}^{-1} \frac{k_{AB,B} k_{B,E}}{k_{AB,E}} = Z_{AB}^* c_{AB,B,E}^{*-1}\,.$$

---

[12]) Zu Δ gehört eine Klasse assoziierter Faktorensysteme; bei geeigneter Wahl von n kommen darunter auch solche vor, die aus n-ten Einheitswurzeln bestehen. Diese brauchen nicht eng assoziiert zu sein, so daß zu Δ mehrere Erweiterungen $\mathfrak{N}$ gehören können, vgl. § 4.

Anstelle des Faktorensystems c tritt also das Faktorensystem c^*, allgemein gilt

$$c^*_{P,Q,R} = c_{P,Q,R} \frac{k_{P,R}}{k_{P,Q} k_{Q,R}}.$$

Offenbar ist c^* zu c assoziert und zwar sind die auftretenden Zahlen k sämtlich n-te Einheitswurzeln. Wir wollen zwei derartige Faktorensysteme *eng assoziiert nennen* [13]). Umgekehrt kann man durch geeignete Wahl des vollständigen Restsystems jedes zu c eng assoziierte Faktorensystem erhalten.

Satz 3: *Zu jeder Erweiterung* $\mathfrak{H}$ *von* $\mathfrak{N}$, *die die Bedingungen von Satz* 2 *erfüllt, ist umgekehrt eine Klasse von eng assoziierten Faktorensystemen zugeordnet; diese und nur diese führen im Sinne von Satz* 2 *auf* $\mathfrak{H}$. *Jedes einzelne dieser Faktorensysteme entspricht einem* E *enthaltenden vollständigen Restsystem von* $\mathfrak{H}$ *nach* $\mathfrak{N}$. *Zu* $\mathfrak{H}$ *gehört damit auch ein Schiefkörper* Δ *mit dem Zentrum* K.

Wir behandeln noch kurz zwei Erweiterungen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}_1$ von $\mathfrak{N}$ der im Satz 2 genannten Form und setzen voraus, daß es eine isomorphe Abbildung von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{H}_1$ gibt, derart, daß zu entsprechenden Elementen von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}_1$ immer dasselbe Element von $\mathfrak{G}$ gehört; die Elemente von $\mathfrak{N}$ brauchen aber nicht einzeln in sich überzugehen. Man erkennt dann leicht, daß zu $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}_1$ zwei Faktorensysteme c und c^λ mit $(\lambda, n) = 1$ gehören. Die zugehörigen Schiefkörper haben, ohne im allgemeinen isomorph zu sein, weitgehend dieselben Eigenschaften. Eine entsprechende Abänderung von c tritt ein, wenn man die primitive n-te Einheitswurzel ε durch eine andere ersetzt.

Weiß man dagegen von zwei Erweiterungen von $\mathfrak{N}$ überhaupt nur, daß sie sich als Gruppen so isomorph aufeinander abbilden lassen, daß $\mathfrak{N}$ in sich übergeht, so können die zugehörigen Schiefkörper von ganz verschiedener Natur sein (vgl. das Beispiel in § 7). Etwas anders ausgedrückt: Bei einer automorphen Abbildung von $\mathfrak{H}$, die in $\mathfrak{G}$ nicht die identische Abbildung induziert, kann der zugeordnete Schiefkörper in einen ganz andersartigen übergehen.

Hervorzuheben ist bei Satz 2 und 3 noch der Fall, daß K selbst die n-ten Einheitswurzeln enthält. Dann wird die Bedingung für Transformation der Elemente von $\mathfrak{N}$ durch die Elemente von $\mathfrak{H}$ einfach die, daß $\mathfrak{N}$ dem Zentrum von $\mathfrak{H}$ angehören soll.

§ 3. Die Abhängigkeit der Erweiterung $\mathfrak{H}$ von n und $\mathsf{K}(\vartheta)$.

Das Faktorensystem c möge jetzt bereits aus n'-ten Einheitswurzeln bestehen, wo n' ein Teiler von n sei. Wir wollen untersuchen, welche Gruppe anstelle von $\mathfrak{H}$ tritt, wenn wir anstelle von n die Zahl n' zugrunde legen. Wenn diese Aufgabe gelöst ist, können wir auch sagen, welche Änderung von $\mathfrak{H}$ bei irgendeiner erlaubten Abänderung von n eintritt; wir können ja immer die Reduktion von n auf den kleinstmöglichen Wert zwischenschieben und dieser geht in allen in Frage kommenden Zahlen n auf.

Ist $\mathfrak{N}'$ eine zyklische Gruppe der Ordnung n', so können wir $\mathfrak{N}'$ als Untergruppe von $\mathfrak{N}$ auffassen. $\mathfrak{N}' < \mathfrak{N}$ ergibt sich von selbst, wenn wir die Elemente von $\mathfrak{N}'$ mit den n'-ten Einheitswurzeln identifizieren. Zu dem Faktorensystem c gehört neben der Erweiterung $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{N}$ auch eine Erweiterung $\mathfrak{H}'$ von $\mathfrak{N}'$ mit Hilfe von $\mathfrak{G}$. Wie die am Anfang von § 2 durchgeführte Konstruktion zeigt (vgl. (9)), kann man $\mathfrak{H}'$ als diejenige Untergruppe von $\mathfrak{H}$ auffassen, die von allen Elementen Z_G und den n'-ten Einheitswurzeln erzeugt wird. Offenbar gilt

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}' \mathfrak{N}; \tag{12}$$

der Index von $\mathfrak{H}'$ in $\mathfrak{H}$ (im gewöhnlichen Sinn) ist $\frac{n}{n'}$.

[13]) Streng genommen muß hier auch noch die zugeordnete Zahl n angegeben werden.

Umgekehrt möge in der Erweiterung $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{N}$ mit Hilfe von $\mathfrak{G}$ eine Untergruppe $\mathfrak{H}'$ vom Index $\frac{n}{n'}$ existieren, für die (12) gilt. Wir bilden den Durchschnitt

$$[\mathfrak{N}, \mathfrak{H}'] = \mathfrak{N}'. \tag{13}$$

Bei der homomorphen Abbildung von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{G}$ geht wegen (12) bereits die Untergruppe $\mathfrak{H}'$ in die ganze Gruppe $\mathfrak{G}$ über; von den Elementen von $\mathfrak{H}'$ haben dabei wegen (13) nur die Elemente von $\mathfrak{N}'$ das Einheitselement als Bildelement. Daher kann man $\mathfrak{H}'$ als Erweiterung von $\mathfrak{N}'$ mit Hilfe von $\mathfrak{G}$ auffassen. $\mathfrak{N}'$ muß dann die Ordnung n' haben. Bestimmen wir jetzt das zu $\mathfrak{H}$ gehörige Faktorensystem c, so können wir das dabei verwendete Restsystem Z_G von $\mathfrak{H}$ nach $\mathfrak{N}$ wegen (12) so wählen, daß alle Z_G zu $\mathfrak{H}'$ gehören. Dann muß in (10) das Element $r_{A,B}$ außer zu $\mathfrak{N}$ auch zu $\mathfrak{H}'$ und also nach (13) zu $\mathfrak{N}'$ gehören, es ist also eine n'-te Einheitswurzel. Wegen (11) gilt dies dann für alle Zahlen von c.

Verwenden wir anstelle von Z_G ein anderes Restsystem, so können wir natürlich nur sagen, daß das Faktorensystem zu einem aus n'-ten Einheitswurzeln bestehenden eng assoziiert ist.

Satz 4: *Ist c das durch die Erweiterung $\mathfrak{H}$ der zyklischen Gruppe $\mathfrak{N}$ mit Hilfe von $\mathfrak{G}$ bestimmte Faktorensystem und ist n' ein Teiler der Ordnung n von $\mathfrak{N}$, so ist c dann und nur dann einem aus n'-ten Einheitswurzeln bestehenden Faktorensystem eng assoziiert, wenn es in $\mathfrak{H}$ eine Untergruppe $\mathfrak{H}'$ vom (gewöhnlichen) Index $\frac{n}{n'}$* [14]) *derart gibt, daß $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}'\mathfrak{N}$ gilt. c gehört dann zu $\mathfrak{H}'$, aufgefaßt als Erweiterung von $\mathfrak{N}'$.*

Gibt es für keinen echten Teiler n' von n eine derartige Untergruppe $\mathfrak{H}'$ so wollen wir $\mathfrak{H}$ eine *reduzierte Erweiterung* von $\mathfrak{N}$ nennen.

Als Spezialfall von Satz 4 ergibt sich ($n' = 1$)

Satz 4': *Dann und nur dann ist c zum Einheitssystem eng assoziiert, wenn die zugehörige Erweiterung $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{N}$ sich als Produkt von $\mathfrak{N}$ und einer zu $\mathfrak{N}$ teilerfremden Untergruppe $\mathfrak{H}'$ darstellen läßt.*

Als nächstes behandeln wir die Frage, wie die Gruppe $\mathfrak{H}$ abzuändern ist, wenn man den Körper $\mathsf{K}(\vartheta)$ durch einen umfassenderen Normalkörper $\mathsf{K}(\vartheta^*)$ über K ersetzt, der dann natürlich von selbst regulärer Zerfällungskörper ist.

Ist $\mathfrak{G}^*$ die Galoissche Gruppe von $\mathsf{K}(\vartheta^*)$ und gehört $\mathsf{K}(\vartheta)$ zu der Untergruppe $\mathfrak{S}$, so kann man $\mathfrak{G}^*$ als Erweiterung von $\mathfrak{S}$ mit Hilfe der Galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathsf{K}(\vartheta)$ auffassen. Als homomorphe Abbildung von $\mathfrak{G}^*$ auf $\mathfrak{G}$ ist dabei natürlich immer die wegen $\mathsf{K}(\vartheta) < \mathsf{K}(\vartheta^*)$ aus der Galoisschen Theorie sich ergebende Abbildung zu nehmen, sie sei mit γ bezeichnet.

Wir erweitern zunächst das Faktorensystem $c_{A,B,C}$ auf $\mathsf{K}(\vartheta^*)$ als Zerfällungskörper [15]). Gilt bei der homomorphen Abbildung von $\mathfrak{G}^*$ auf $\mathfrak{G}$ für drei beliebige Elemente P, Q, R von $\mathfrak{G}^*$ etwa

$$\gamma\colon \quad P \to A, \quad Q \to B, \quad R \to C, \tag{14}$$

so erhält man die Erweiterung von c, indem man setzt

$$c_{P,Q,R} = c_{A,B,C};$$

auch dies erweiterte Faktorensystem soll mit c bezeichnet werden [16]), es besteht natürlich

---

[14]) Aus $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}'\mathfrak{N}$ folgt von selbst, daß der Index von $\mathfrak{H}'$ ein Teiler von n ist.

[15]) Vgl. U. § 3.

[16]) Dabei können zwei zu $\mathsf{K}(\vartheta)$ gehörige, dort nicht eng assoziierte Faktorensysteme in $\mathsf{K}(\vartheta^*)$ eng assoziiert werden, vgl. § 4.

auch aus n-ten Einheitswurzeln. Die zugehörige Erweiterung von $\mathfrak{R}$ mit Hilfe von $\mathfrak{G}^*$ sei mit $\mathfrak{H}^*$ bezeichnet und zwar werde das Faktorensystem c durch das Restsystem Z_P^* von $\mathfrak{H}^*$ nach $\mathfrak{R}$ geliefert, wo P die Elemente von $\mathfrak{G}^*$ durchläuft. Dann ist, wenn (14) gilt,

$$Z_P^* Z_Q^* = Z_{PQ}^* c_{PQ,Q,E}^{-1} = Z_{PQ}^* c_{AB,B,E}^{-1}, \qquad \varepsilon Z_P^* = Z_P^* \varepsilon^P = Z_P^* \varepsilon^A . \tag{15}$$

Ordnen wir unter der Annahme (14) einem beliebigen Element $H^* = Z_P^* \varepsilon^\nu$ von $\mathfrak{H}^*$ das Element $H = Z_A \varepsilon^\nu$ von $\mathfrak{H}$ zu, so zeigt Vergleich von (15) und (9), daß man eine homomorphe Abbildung φ von $\mathfrak{H}^*$ auf $\mathfrak{H}$ erhält. Die Elemente von $\mathfrak{R}$ gehen bei φ in sich über. Die durch die Erweiterungseigenschaft festgelegte homomorphe Abbildung von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{G}$ nennen wir η, ebenso sei η^* die Abbildung von $\mathfrak{H}^*$ auf $\mathfrak{G}^*$. Dann folgt aus der Konstruktion von φ unmittelbar

$$\eta^* \gamma = \varphi \eta; \tag{16}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{H}^* & \xrightarrow{\eta^*} & \mathfrak{G}^* \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} \\ \mathfrak{H} & \xrightarrow{\eta} & \mathfrak{G} \end{array} .$$

Links und rechts steht in der Gleichung (16) dieselbe homomorphe Abbildung von $\mathfrak{H}^*$ auf $\mathfrak{G}$.

Sind $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$, $\mathfrak{H}$ und die Abbildungen γ und η gegeben, so ist die Erweiterung $\mathfrak{H}^*$ von $\mathfrak{R}$ mit Hilfe von $\mathfrak{G}^*$ durch die Existenz einer homomorphen Abbildung φ von $\mathfrak{H}^*$ auf $\mathfrak{H}$ mit der Eigenschaft (16), *die die Elemente von $\mathfrak{R}$ in sich transformiert, in eindeutiger Weise festgelegt.*

Zum Nachweis wählen wir in einer derartigen Erweiterung $\mathfrak{H}^*$ ein vollständiges Restsystem mod $\mathfrak{R}$ und bezeichnen das dem Element P von $\mathfrak{G}^*$ entsprechende Element des Restsystems mit Z_P^*. Es sei $Z_E^* = E$. Die Elemente von $\mathfrak{H}^*$ können wir darin eindeutig in die Form $Z_P^* \varepsilon^\mu$ setzen. Ist $Z_Q^* \varepsilon^\nu$ ein zweites Element von $\mathfrak{H}^*$, so gilt also eine Beziehung

$$Z_P^* \varepsilon^\mu Z_Q^* \varepsilon^\nu = Z_{PQ}^* \varepsilon^\varrho . \tag{17}$$

Wir haben zu zeigen, daß ε^ϱ durch die Elemente auf der linken Seite von (17) eindeutig bestimmt ist.

Durch φ geht das Element Z_R^* von $\mathfrak{H}^*$ in ein Element $Z_C \varepsilon^\sigma$ von $\mathfrak{H}$ über, dabei ist R Element von $\mathfrak{G}^*$, C von $\mathfrak{G}$. Ersetzt man, was für $R \neq E$ erlaubt ist, von vornherein Z_R^* durch $Z_R^* \varepsilon^{-\sigma}$, so wird das Bildelement in $\mathfrak{H}$ gerade $Z_C \varepsilon^\sigma \cdot \varepsilon^{-\sigma} = Z_C$. Man darf also $\sigma = 0$ annehmen, für $R = E$ ist dies von selbst erfüllt. Bei φ gilt $Z_R^* \to Z_C$, bei η gilt $Z_C \to C$. Andererseits ist $Z_R^* \to R$ bei η^*; wegen (16) muß also C gerade das Bildelement von R bei γ sein. Die Bildelemente A bzw. B von P bzw. Q bei γ sind nach Voraussetzung bekannt. Aus (17) folgt dann durch Anwendung von φ

$$Z_A \varepsilon^\mu Z_B \varepsilon^\nu = Z_{AB} \varepsilon^\varrho .$$

Da $\mathfrak{H}$ gegeben ist, ist also ε^ϱ durch die linke Seite von (17) wirklich eindeutig bestimmt.

Daß eine Erweiterung $\mathfrak{H}^*$ mit den genannten Eigenschaften immer existiert, folgt aus unsern Überlegungen oben, da man bei geeigneter Wahl von K stets Normalkörper $\mathsf{K}(\vartheta)$ und $\mathsf{K}(\vartheta^*)$ mit den Galoisschen Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^*$ finden kann; es ist natürlich diese Existenz auch direkt leicht zu beweisen. Durch die Existenz einer (16) erfüllenden homomorphen Abbildung φ, die die Elemente von $\mathfrak{R}$ in sich transformiert, ist also die Erweiterung $\mathfrak{H}^*$ von $\mathfrak{R}$ eindeutig festgelegt, wir bezeichnen $\mathfrak{H}^*$ als *die direkte Übertragung der Erweiterung $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{G}^*$ als erweiternde Gruppe.* Dann können wir sagen:

Satz 5: $\mathsf{K}(\vartheta)$ *sei ein Normalkörper mit der Galoisschen Gruppe* $\mathfrak{G}$. *Durch die Erweiterung* $\mathfrak{H}$ *der zyklischen Gruppe* $\mathfrak{N}$ *mit Hilfe von* $\mathfrak{G}$ *sei ein Faktorensystem* c *festgelegt. Ersetzt man* $\mathsf{K}(\vartheta)$ *durch einen umfassenderen Normalkörper* $\mathsf{K}(\vartheta^*)$ *mit der Galoisschen Gruppe* $\mathfrak{G}^*$, *so ist die zugehörige Erweiterung* $\mathfrak{H}^*$ *von* $\mathfrak{N}$ *die direkte Übertragung der Erweiterung* $\mathfrak{H}$ *von* $\mathfrak{N}$ *mit Hilfe von* $\mathfrak{G}$ *auf die erweiternde Gruppe* $\mathfrak{G}^*$.

Ist $\mathfrak{T}$ die Untergruppe von $\mathfrak{H}^*$, die bei der Abbildung φ in das Einheitselement übergeführt wird, so ist $\mathfrak{T}$ eine zu $\mathfrak{N}$ teilerfremde invariante Untergruppe, da die Elemente von $\mathfrak{N}$ bei φ in sich übergehen. Umgekehrt gilt

Satz 6: *Ist durch die Erweiterung* $\mathfrak{H}$ *von* $\mathfrak{N}$ *mit Hilfe von* $\mathfrak{G}$ *ein Faktorensystem* c *festgelegt, wo* $\mathfrak{G}$ *die Galoissche Gruppe des regulären Zerfällungskörpers* $\mathsf{K}(\vartheta)$ *bedeutet, und besitzt* $\mathfrak{H}$ *eine zu* $\mathfrak{N}$ *teilerfremde invariante Untergruppe* $\mathfrak{T} \neq E$, *so ist bereits ein echter Teilkörper von* $\mathsf{K}(\vartheta)$ *ein regulärer Zerfällungskörper.*

Beweis: Um mit den Bezeichnungen oben in Übereinstimmung zu kommen, wollen wir für $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}$, $\mathsf{K}(\vartheta)$ jetzt $\mathfrak{H}^*$, $\mathfrak{G}^*$, $\mathsf{K}(\vartheta^*)$ schreiben. Bei der homomorphen Abbildung η^* von $\mathfrak{H}^*$ auf $\mathfrak{G}^*$ geht $\mathfrak{T}$ in eine invariante Untergruppe $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{G}^*$ über; $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ haben dieselbe Ordnung, da ja nur die Elemente von $\mathfrak{N}$ in das Einheitselement übergehen. Der zu $\mathfrak{S}$ gehörige Unterkörper $\mathsf{K}(\vartheta)$ von $\mathsf{K}(\vartheta^*)$ ist also sicher von $\mathsf{K}(\vartheta^*)$ verschieden; es ist ein Normalkörper.

Seine Galoissche Gruppe $\mathfrak{G}$ können wir mit der Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{G}^*}{\mathfrak{S}}$ identifizieren; γ stellt die durch die Nebengruppen nach $\mathfrak{S}$ vermittelte Abbildung von $\mathfrak{G}^*$ auf $\mathfrak{G}$ dar. Die Gruppe $\frac{\mathfrak{H}^*}{\mathfrak{T}}$ können wir als Erweiterung $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{N}$ mit Hilfe von $\mathfrak{G}$ auffassen; dabei haben wir die Nebengruppen $\varepsilon^\nu\mathfrak{T}$ mit ε^ν zu identifizieren; die homomorphe Abbildung η von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{G}$ wird durch $H^*\mathfrak{T} \to G^*\mathfrak{S}$ dargestellt, wenn G^* das H^* vermittels η^* zugeordnete Element ist. Ist schließlich φ die durch Nebengruppen nach $\mathfrak{T}$ vermittelte Abbildung von $\mathfrak{H}^*$ auf $\mathfrak{H}$, so gilt (16), und die Elemente ε^ν von $\mathfrak{N}$ gehen bei φ in sich über. Nach Satz 5 kann man daher bereits $\mathsf{K}(\vartheta)$ als regulären Zerfällungskörper benützen; anstelle von $\mathfrak{H}^*$ hat man die Erweiterung $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{N}$ mit Hilfe von $\mathfrak{G}$ zu nehmen.

Zugleich zeigt sich, wie man unter den Voraussetzungen von Satz 5 von $\mathfrak{H}^*$ zu $\mathfrak{H}$ zurückgelangen kann.

Bei der Aufstellung aller Faktorensysteme kann man sich nach Satz 6 auf solche Erweiterungen $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{N}$ beschränken, die keine zu $\mathfrak{N}$ teilerfremde invariante Untergruppe außer E besitzen.

§ 4. Bedingung für Isomorphie zweier Schiefkörper.

Es sei jetzt ein Faktorensystem c auf die in § 2 angegebene Weise durch einen Normalkörper $\mathsf{K}(\vartheta)$ und die Erweiterung $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{N}$ festgelegt. Wir fragen jetzt, wann c zum Einheitssystem 1 assoziiert ist, d. h. wann der zu c gehörige Schiefkörper mit seinem Zentrum K übereinstimmt.

Ist der Normalkörper $\mathsf{K}(\vartheta)$ mit der Galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}$ in einen umfassenderen Normalkörper $\mathsf{K}(\vartheta^*)$ über K eingebettet, so kann man nach unseren Festsetzungen die Galoissche Gruppe $\mathfrak{G}^*$ von $\mathsf{K}(\vartheta^*)$ als Erweiterung einer Untergruppe $\mathfrak{S}$ mit Hilfe von $\mathfrak{G}$ auffassen, $\mathfrak{S}$ ist die zum Teilkörper $\mathsf{K}(\vartheta)$ gehörige Untergruppe von $\mathfrak{G}^*$. Bei dieser Auffassung gilt

Satz 7: *Der Schiefkörper* Δ *sei durch den Normalkörper* $\mathsf{K}(\vartheta)$ *und die Erweiterung* $\mathfrak{H}$ *von* $\mathfrak{N}$ *mit Hilfe von* $\mathfrak{G}$ *gegeben, wo* $\mathfrak{G}$ *die Galoissche Gruppe von* $\mathsf{K}(\vartheta)$ *bedeutet. Ist, wie man annehmen darf,* $\mathfrak{H}$ *eine reduzierte Erweiterung, so ist* Δ *dann und nur dann mit* K *selbst*

identisch, wenn man $\mathsf{K}(\vartheta)$ *in einen Normalkörper* $\mathsf{K}(\vartheta^*)$ *über* K *einbetten kann, derart, daß die Galoissche Gruppe von* $\mathsf{K}(\vartheta^*)$ *gerade die Erweiterung* $\mathfrak{H}$ *von* $\mathfrak{N}$ *mit Hilfe von* $\mathfrak{G}$ *ist.*

Bemerkung: Das heißt also, daß der Teilkörper $\mathsf{K}(\vartheta)$ von $\mathsf{K}(\vartheta^*)$ zu der Untergruppe $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{H}$ gehören soll, und daß die durch die Galoissche Theorie bedingte homomorphe Abbildung der Galoisschen Gruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathsf{K}(\vartheta^*)$ auf die Galoissche Gruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathsf{K}(\vartheta)$ gerade die in der Definition der Erweiterung von $\mathfrak{H}$ festgelegte Abbildung ist.

Beweis: 1) Ist $\Delta = \mathsf{K}$, ist also das zu Δ gehörige Faktorensystem c zu 1 assoziiert, so schließt man recht einfach [17]), daß man durch Ersetzen von $\mathsf{K}(\vartheta)$ durch einen Erweiterungskörper $\mathsf{K}(\vartheta^*)$ erreichen kann, daß c zu 1 eng assoziiert ist; $\mathsf{K}(\vartheta^*)$ kann man dabei als Normalkörper über K derart wählen, daß für seinen Relativgrad t in bezug auf $\mathsf{K}(\vartheta)$ gilt

$$t \leqq n. \tag{18}$$

Die Bezeichnungen seien wie in § 3 beim Beweis der Sätze 5 und 6 gewählt. Verwendet man also $\mathsf{K}(\vartheta^*)$ anstelle von $\mathsf{K}(\vartheta)$ als regulären Zerfällungskörper, so gehört c zu der Erweiterung $\mathfrak{H}^*$ von $\mathfrak{N}$. Da aber c dann zu 1 eng assoziiert ist, besitzt $\mathfrak{H}^*$ nach Satz 4′ eine Untergruppe $\mathfrak{F}$ vom Index n, derart, daß

$$\mathfrak{H}^* = \mathfrak{F}\mathfrak{N} \tag{19}$$

ist, $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{N}$ sind teilerfremd.

Wir wenden auf (19) die homomorphe Abbildung φ an; dabei geht $\mathfrak{F}$ in eine Untergruppe $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{H}$ über; es folgt, da $\mathfrak{N}$ elementweise in sich übergeht,

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{N}\mathfrak{N}.$$

Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{H}$ reduziert, nach Satz 4 kann dann eine derartige Gleichung nur bestehen, wenn $\mathfrak{N}$ den Index 1 in $\mathfrak{H}$ hat, $\mathfrak{F}$ geht also in die ganze Gruppe $\mathfrak{H}$ über. Ist m wieder der Grad von $\mathsf{K}(\vartheta)$, so hat $\mathfrak{H}$ die Ordnung mn, $\mathfrak{H}^*$ die Ordnung mnt, und also $\mathfrak{F}$ die Ordnung mt. Wegen (18) ist diese Zahl nicht größer als die Ordnung von $\mathfrak{H}$; es muß also $\mathfrak{F}$ durch φ *isomorph* auf $\mathfrak{H}$ abgebildet werden und in (18) das Gleichheitszeichen stehen.

Bei der homomorphen Abbildung η^* gehen nur die Elemente von $\mathfrak{N}$ in das Einheitselement über; wegen (19) wird bereits die Untergruppe $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{H}^*$ auf die ganze Gruppe $\mathfrak{G}^*$ abgebildet, und zwar isomorph wegen der Teilerfremdheit von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{N}$.

Es ist also $\mathfrak{F}$ isomorph sowohl auf $\mathfrak{H}$ wie auf $\mathfrak{G}^*$ bezogen; wir erhalten dabei auch eine isomorphe Abbildung von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{G}^*$. Nach (16) entspricht dabei zugeordneten Elementen von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}^*$ vermittels η bzw. γ dasselbe Element in $\mathfrak{G}$. Ist speziell der Untergruppe $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{G}^*$ die invariante Untergruppe $\mathfrak{S}$ zugeordnet, so besteht $\mathfrak{S}$ aus allen denjenigen Elementen von $\mathfrak{G}^*$, die bei γ in E übergehen. Also ist $\mathfrak{S}$ gerade die zum Teilkörper $\mathsf{K}(\vartheta)$ von $\mathsf{K}(\vartheta^*)$ gehörige Untergruppe von $\mathfrak{G}^*$.

Identifiziert man $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{N}$, so sieht man, daß $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}^*$ dieselbe Erweiterung von $\mathfrak{N}$ mit Hilfe von $\mathfrak{G}$ darstellen [18]).

2) Umgekehrt lasse sich jetzt $\mathsf{K}(\vartheta)$ in einen Normalkörper $\mathsf{K}(\vartheta^*)$ mit der Erweiterung $\mathfrak{H}$ als Galoisscher Gruppe einbetten. Wir verwenden $\mathsf{K}(\vartheta^*)$ als regulären Zer-

---

[17]) Vgl. U. § 4, S. 693. Dort ergibt sich auch noch, daß man $\mathsf{K}(\vartheta^*)$ außerdem relativ zyklisch über $\mathsf{K}(\vartheta)$ annehmen kann, was bei uns von selbst mit herauskommt. Übrigens kann man die Zulässigkeit der Annahme (18) durch eine Modifikation des Verfahrens mit ableiten.

[18]) Setzt man nicht die Gültigkeit von (18) für $\mathsf{K}(\vartheta^*)$ voraus, so kann man durch Abänderung des Verfahrens zeigen, daß jeder Normalkörper $\mathsf{K}(\vartheta^*)$ über K, der $\mathsf{K}(\vartheta)$ enthält und in dem c zu 1 eng assoziiert ist, bereits einen Teilkörper $\mathsf{K}(\tilde{\vartheta})$ mit den gleichen Eigenschaften besitzt, derart, daß $\mathsf{K}(\tilde{\vartheta})$ relativ zyklisch in bezug auf $\mathsf{K}(\vartheta)$ vom Grade n ist.

fällungskörper und wählen dieselben Bezeichnungen wie eben. $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}^*$ werden dann identisch. Die homomorphen Abbildungen η und γ fallen zusammen; φ und η^* stellen zwei homomorphe Abbildungen von $\mathfrak{H}^*$ auf dieselbe Gruppe $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}^*$ dar. Es sei $\mathfrak{F}$ die Untergruppe derjenigen Elemente von $\mathfrak{H}^*$, denen bei φ und η^* dasselbe Bildelement zugeordnet ist. Ist H^* ein beliebiges Element von $\mathfrak{H}^*$ und H und G^* die Bildelemente bei φ bzw. η^*, so werden nach (16) H und G^* durch $\eta = \gamma$ auf dasselbe Element von $\mathfrak{G}$ abgebildet. Nur die Untergruppe $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{H}$ geht bei η in das Einheitselement über, also ist für geeignetes μ

$$H\varepsilon^{\mu} = G^*. \tag{20}$$

Bei φ gehen die Elemente von $\mathfrak{N}$ in sich über, während bei η^* diese Elemente in das Einheitselement übergeführt werden. Daraus folgt zunächst, daß die Untergruppen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{H}^*$ teilerfremd sind. Ferner ergibt sich, daß $H^*\varepsilon^{\mu}$ bei φ das Bildelement $H\varepsilon^{\mu}$ besitzt, bei η^* das Bildelement G^*. Wegen (20) gehört also $H^*\varepsilon^{\mu}$ zu $\mathfrak{F}$; da H^* beliebig war, folgt $\mathfrak{H}^* = \mathfrak{F}\mathfrak{N}$. Nach Satz 4′ ist dann c bei Verwendung von $\mathsf{K}(\vartheta^*)$ als regulärem Zerfällungskörper zu 1 eng assoziiert, also wie behauptet $\mathsf{K} = \Delta$.

Der Beweis zeigt, daß die im Satz 7 vorkommenden Normalkörper $\mathsf{K}(\vartheta^*)$ geradezu dadurch charakterisiert sind, daß in ihnen c zu 1 eng assoziiert ist und (18) gilt.

Ist $\Delta \neq \mathsf{K}$, so kann man den Schiefkörper Δ als einen Ersatz für den fehlenden Körper mit der Gruppe $\mathfrak{H}$ ansehen.

Ist ein Normalkörper $\mathsf{K}(\vartheta)$ über K mit der Galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}$ gegeben, ferner eine Zahl n, die den im § 2 gestellten Bedingungen genügt, so bestimmen wir alle Erweiterungen $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{N}$ mit Hilfe von $\mathfrak{G}$, bei denen die Elemente von $\mathfrak{N}$ durch die Elemente von $\mathfrak{H}$ in der im Satz 2 angegebenen Weise transformiert werden; $\mathfrak{N}$ bedeutet dabei wie immer die zyklische Gruppe n-ter Ordnung. Natürlich gibt es nur endlich viele $\mathfrak{H}$, es seien etwa $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_r$. Zur Aufstellung der $\mathfrak{H}_\varrho$ muß man n und $\mathfrak{G}$ kennen und außerdem wissen, welchen Einfluß die Elemente von $\mathfrak{G}$ auf ε, aufgefaßt als Größe von $\mathsf{K}(\vartheta)$, haben Man kann diese $\mathfrak{H}_\varrho$ ihrerseits in einfacher Weise als Elemente einer Abelschen Gruppe $\mathfrak{Z}$ auffassen. Als „*Produkt*“ zweier Erweiterungen $\mathfrak{H}_\alpha$ und $\mathfrak{H}_\beta$ hat man dabei diejenige Erweiterung $\mathfrak{H}_\gamma$ zu nehmen, die dem Produkt der zu $\mathfrak{H}_\alpha$ und $\mathfrak{H}_\beta$ gehörigen Faktorensysteme entspricht; $\mathfrak{H}_\gamma$ ist durch $\mathfrak{H}_\alpha$ und $\mathfrak{H}_\beta$ eindeutig bestimmt. Es ist natürlich ein im Rahmen der Gruppentheorie vollständig beschreibbarer Prozeß, der von $\mathfrak{H}_\alpha$ und $\mathfrak{H}_\beta$ zu $\mathfrak{H}_\gamma$ führt.

Gewisse unter den $\mathfrak{H}_\varrho$ besitzen als zugehörigen Schiefkörper den Körper K selbst, sie sind nach Satz 7 durch *Einbettungseigenschaften* von $\mathsf{K}(\vartheta)$ charakterisiert [19]). Diese $\mathfrak{H}_\varrho$ bilden eine Untergruppe $\mathfrak{W}$ von $\mathfrak{Z}$, da das Produkt zweier zu 1 assoziierter Faktorensysteme die gleiche Eigenschaft hat. Den Elementen der Faktorgruppe von $\mathfrak{Z}$ nach $\mathfrak{W}$ sind dann die in Frage kommenden Schiefkörper Δ eineindeutig zugeordnet.

Will man entscheiden, ob zwei Erweiterungen $\mathfrak{H}_\alpha$ und $\mathfrak{H}_\beta$ denselben Schiefkörper bestimmen, so hat man zu untersuchen, ob sie zu derselben Nebengruppe von $\mathfrak{Z}$ nach $\mathfrak{W}$ gehören. Das kommt auf die Frage hinaus, ob ein gewisses $\mathfrak{H}_\varrho$ zu $\mathfrak{W}$ gehört, also nach Satz 7, ob sich ein gewisses Einbettungsproblem lösen läßt.

Hat man schließlich zwei Schiefkörper Δ_1 und Δ_2 mit Hilfe verschiedener regulärer Zerfällungskörper $\mathsf{K}(\vartheta)$ bzw. $\mathsf{K}(\varrho)$ aufgestellt, so kann man diese beiden Körper mit Hilfe von Satz 5 durch $\mathsf{K}(\vartheta, \varrho)$ ersetzen. Wählen wir außerdem für n das kleinste gemeinsame Vielfache der bei Δ_1 und Δ_2 in entsprechender Eigenschaft auftretenden Zahlen, so haben wir den eben behandelten Fall.

---

[19]) Dabei hat man gegebenenfalls $\mathfrak{H}_\varrho$ durch die zugehörige reduzierte Gruppe zu ersetzen.

Satz 8: *Sind zwei Schiefkörper* Δ_1 *und* Δ_2 *mit Hilfe der regulären Zerfällungskörper* $\mathsf{K}(\vartheta)$ *und* $\mathsf{K}(\varrho)$ *gegeben, so sind* Δ_1 *und* Δ_2 *dann und nur dann isomorph, wenn ein wohlbestimmtes spezielles Einbettungsproblem für den Körper* $\mathsf{K}(\vartheta, \varrho)$ *in einen relativ zyklischen Körper lösbar ist.*

Die in Frage kommende Erweiterung $\mathfrak{H}$ kann man, wenn die Galoisschen Gruppen von $\mathsf{K}(\vartheta)$ und $\mathsf{K}(\varrho)$ und die zum Durchschnitt der beiden Körper gehörigen Untergruppen bekannt sind, nach Satz 5 allein durch Untersuchung von Gruppen endlicher Ordnung aufstellen.

§ 5. Charakterisierung der Zerfällungskörper. Aufstellung aller Schiefkörper eines gegebenen Index.

Es sei wieder c ein Faktorensystem, das $\mathsf{K}(\vartheta)$ als regulären Zerfällungskörper besitzt, Δ sei der zugehörige Schiefkörper, $\mathfrak{D}$ eine in $\mathsf{K}(\vartheta)$ rationale absolut irreduzible Darstellung von Δ. Dann ist c das Faktorensystem von $\mathfrak{D}$.

Ersetzen wir den Grundkörper K durch einen Erweiterungskörper $\widetilde{\mathsf{K}}$ und fassen wir $\mathfrak{D}$ als eine in $\widetilde{\mathsf{K}}(\vartheta)$ rationale Gruppe auf, so gehört dazu ein gewisses Faktorensystem $\tilde{c}$, das sich auf $\widetilde{\mathsf{K}}$ als Grundkörper bezieht; jedem c ist auf diese Weise ein $\tilde{c}$ zugeordnet. Offenbar besitzt $\tilde{c}$ den Normalkörper $\widetilde{\mathsf{K}}(\vartheta)$ als regulären Zerfällungskörper, man kann dieselbe Zahl n wie bei c verwenden. Dann und nur dann ist $\tilde{c}$ dem Einheitssystem von $\widetilde{\mathsf{K}}$ assoziiert, wenn $\mathfrak{D}$ den Körper $\widetilde{\mathsf{K}}$ als Zerfällungskörper besitzt.

c werde jetzt durch die Erweiterung $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{N}$, $\tilde{c}$ durch die Erweiterung $\widetilde{\mathfrak{H}}$ von $\mathfrak{N}$ gegeben. Wir fragen, wie $\mathfrak{H}$ und $\widetilde{\mathfrak{H}}$ zusammenhängen. Offenbar genügt es dabei, zwei Spezialfälle zu behandeln

1) $\widetilde{\mathsf{K}}$ ist ein Teilkörper von $\mathsf{K}(\vartheta)$.

2) $\widetilde{\mathsf{K}}$ und $\mathsf{K}(\vartheta)$ haben K als Durchschnitt.

Durch zwei aufeinander folgende Abänderungen von diesen beiden Arten kann man von K zu jedem beliebigen $\widetilde{\mathsf{K}}$ kommen [20]).

Im zweiten Fall kann man $\mathfrak{G}$ auch als die Galoissche Gruppe von $\widetilde{\mathsf{K}}(\vartheta)$ in bezug auf K auffassen, die Erweiterung $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{N}$ bleibt offenbar bei Übergang von K zu $\widetilde{\mathsf{K}}$ als Grundkörper ungeändert. Im ersten Fall gehöre $\widetilde{\mathsf{K}}$ zu der Untergruppe $\widetilde{\mathfrak{G}}$ von $\mathfrak{G}$. Geht bei der homomorphen Abbildung von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{G}$ etwa die Untergruppe $\widetilde{\mathfrak{H}}$ in $\widetilde{\mathfrak{G}}$ über, so kann man $\widetilde{\mathfrak{H}}$ als Erweiterung von $\mathfrak{N}$ mit Hilfe von $\widetilde{\mathfrak{G}}$ auffassen; man sieht leicht ein, daß gerade zu $\widetilde{\mathfrak{H}}$ das Faktorensystem $\tilde{c}$ gehört.

Dann und nur dann ist $\widetilde{\mathsf{K}}$ Zerfällungskörper von Δ, wenn für den Normalkörper $\widetilde{\mathsf{K}}(\vartheta)$ über dem Grundkörper $\widetilde{\mathsf{K}}$ und die Erweiterung $\widetilde{\mathfrak{H}}$ das Einbettungsproblem eine Lösung besitzt.

Satz 9: *Die Zerfällungskörper* $\widetilde{\mathsf{K}}$ *eines Schiefkörpers* Δ *lassen sich durch die Lösbarkeit von gewissen Einbettungsproblemen für einen Normalkörper* $\widetilde{\mathsf{K}}(\vartheta)$ *in bezug auf* $\widetilde{\mathsf{K}}$ *als Grundkörper charakterisieren.*

Es sei Δ ein Schiefkörper mit K als Zentrum; $\mathsf{K}(\vartheta)$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{G}$, m und n mögen die alte Bedeutung haben. Wir behandeln jetzt die Frage der Bestimmung des Index μ von Δ. Jedenfalls ist $\mu \leqq m$. Es genügt also, wenn wir für eine Zahl $t \leqq m$ entscheiden können, ob es Zerfällungskörper $\mathsf{K}(\alpha)$ vom Grade t gibt. Dabei bedeutet es keine wesent-

[20]) Dabei hat man bei der zweiten Abänderung zu beachten, daß an Stelle des ursprünglichen K nach der ersten Abänderung ein anderer Grundkörper erscheint.

liche Einschränkung, wenn wir verlangen, daß $\mathsf{K}(\alpha)$ mit $\mathsf{K}(\vartheta)$ einen festen Durchschnitt $\mathsf{K}(\delta)$ hat, da wir ja für $\mathsf{K}(\delta)$ der Reihe nach die endlich vielen Teilkörper von $\mathsf{K}(\vartheta)$ nehmen können. $\mathsf{K}(\delta)$ gehöre etwa zur Untergruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{H}$; $\mathfrak{H}$ sei wieder die Untergruppe von $\mathfrak{H}$, die aus allen den Elementen besteht, die bei der homomorphen Abbildung von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{G}$ in Elemente von $\mathfrak{G}$ übergehen.

Ist $\mathsf{K}(\alpha)$ ein Körper vom Grade t, der mit $\mathsf{K}(\vartheta)$ den vorgeschriebenen Durchschnitt besitzt, so kann man $\mathfrak{G}$ als die Galoissche Gruppe von $\mathsf{K}(\vartheta, \alpha)$ in bezug auf $\mathsf{K}(\alpha)$ auffassen. $\mathsf{K}(\alpha)$ ist dann und nur dann Zerfällungskörper, wenn man in bezug auf $\mathsf{K}(\alpha)$ als Grundkörper den Körper $\mathsf{K}(\vartheta, \alpha)$ in einen Normalkörper $\mathsf{K}(\lambda)$ über $\mathsf{K}(\alpha)$ derart einbetten kann, daß die Galoissche Gruppe $\mathfrak{H}$ ist, aufgefaßt als Erweiterung von $\mathfrak{N}$ mit Hilfe von $\mathfrak{G}$. In bezug auf K als Grundkörper sei dann $\mathsf{K}(\omega)$ der zu $\mathsf{K}(\lambda)$ gehörige Galoissche Körper. $\mathsf{K}(\vartheta)$ erscheint in den Normalkörper $\mathsf{K}(\omega)$ über K eingebettet; die Galoissche Gruppe sei die Erweiterung $\mathfrak{U}$ einer Gruppe $\mathfrak{V}$ mit Hilfe von $\mathfrak{G}$. Dann muß die Ordnung von $\mathfrak{U}$ unter einer festen Schranke liegen (z. B. unter (tmn) !).

Ist umgekehrt eine Erweiterung $\mathfrak{U}$ einer Gruppe $\mathfrak{V}$ mit Hilfe von $\mathfrak{G}$ gegeben, und $\mathsf{K}(\vartheta)$ in einen Normalkörper $\mathsf{K}(\omega)$ mit der Erweiterung $\mathfrak{U}$ als Galoisscher Gruppe eingebettet, so kann man allein aus der gruppentheoretischen Struktur von $\mathfrak{U}$ ablesen, ob $\mathsf{K}(\omega)$ in der oben geschilderten Weise aus einem Zerfällungskörper $\mathsf{K}(\alpha)$ entstanden sein kann. Alle oben verwendeten Eigenschaften der verschiedenen vorkommenden Körper drücken sich nämlich vollständig äquivalent durch Eigenschaften von $\mathfrak{U}$ aus.

Man hat also zunächst alle endlich vielen Erweiterungen $\mathfrak{U}$ irgendeiner Gruppe $\mathfrak{V}$ mit Hilfe von $\mathfrak{G}$ aufzustellen, deren Ordnung unter der angegebenen Schranke liegt. Danach muß man durch gruppentheoretische Untersuchung von $\mathfrak{U}$ feststellen, ob $\mathfrak{U}$ überhaupt bei einem $\mathsf{K}(\alpha)$ in der geschilderten Weise auftreten kann; es mögen dafür etwa $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \ldots, \mathfrak{U}_r$ in Frage kommen. Schließlich hat man zu entscheiden, ob sich das Einbettungsproblem für $\mathsf{K}(\vartheta)$ und $\mathfrak{U}_\varrho$ bei K als Grundkörper lösen läßt. Ist dies für ein ϱ aus der Reihe $1, 2, \ldots, r$ der Fall, so besitzt Δ Zerfällungskörper $\mathsf{K}(\alpha)$ vom Grade t, die mit $\mathsf{K}(\vartheta)$ den Durchschnitt $\mathsf{K}(\delta)$ haben. Hat dagegen keins der Einbettungsprobleme eine Lösung, so gibt es kein derartiges $\mathsf{K}(\alpha)$.

Damit ist gezeigt, *daß sich die Bestimmung des Index μ von Δ auf die Beantwortung von endlich vielen wohlbestimmten Einbettungsproblemen zurückführen läßt.* In ähnlicher Weise kann man übrigens auch die Frage, ob ein algebraischer Körper $\widetilde{\mathsf{K}} = \mathsf{K}(\varrho)$ Zerfällungskörper ist, auf die Entscheidung von einem von endlich vielen Einbettungsproblemen mit K als Grundkörper zurückführen. Hierbei handelt es sich allerdings ebenso wie auch bei der Behandlung des Index im allgemeinen nicht um Einbettung in relativ zyklische Körper.

Einfacher ist die Untersuchung des Exponenten ν von Δ. Faßt man $\mathfrak{H}$ als Element von $\mathfrak{Z}$ (vgl. § 4) auf, so ist die kleinste Potenz von $\mathfrak{H}$, die zur Untergruppe $\mathfrak{W}$ gehört, gerade die ν-te Potenz. *Damit ist auch die Bestimmung von ν auf Einbettungsprobleme zurückgeführt.*

Schließlich kommen auch alle Fragen, ob Zerfällungskörper einer bestimmten algebraischen Struktur (z. B. Normalkörper eines gegebenen Grades t oder zyklische Körper) existieren, auf Einbettungsfragen heraus.

Wir wollen jetzt den Begriff des regulären Zerfällungskörpers dahin einengen, daß wir von der in § 2 eingeführten Zahl n fordern, daß sie im Grad m von $\mathsf{K}(\vartheta)$ aufgeht. Ein Normalkörper m-ten Grades über K heißt also *regulärer Zerfällungskörper* eines Schiefkörpers Δ, wenn er Zerfällungskörper ist, und wenn Δ ein zu $\mathsf{K}(\vartheta)$ gehöriges Fak-

torensystem besitzt, das aus m-ten Einheitswurzeln besteht. Jedes Δ besitzt auch noch im neuen Sinn reguläre Zerfällungskörper, vgl. Anm. 9 und § 6.

Zu $\mathsf{K}(\vartheta)$ gehört dann eine größtmögliche Zahl n, die den Bedingungen genügt: 1) n geht im Grad m von $\mathsf{K}(\vartheta)$ auf; 2) die n-ten Einheitswurzeln gehören zu $\mathsf{K}(\vartheta)$; 3) hat K die Charakteristik $p \neq 0$, so ist $(n, p) = 1$; im Fall der Charakteristik 0 fällt die dritte Bedingung fort. Wir wählen in den früheren Betrachtungen für n die so charakterisierte Zahl; jede andere den Bedingungen genügende Zahl n' geht dann in n auf.

Zu jedem Normalkörper $\mathsf{K}(\vartheta)$ gehören jetzt nur endlich viele Schiefkörper Δ, die $\mathsf{K}(\vartheta)$ als regulären Zerfällungskörper besitzen. Die im § 4 mit $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{W}$ bezeichneten endlichen Gruppen hängen dann allein von $\mathsf{K}(\vartheta)$ ab und zwar ist $\mathfrak{Z}$ durch die Galoissche Gruppe von $\mathsf{K}(\vartheta)$ und das Verhalten der zu $\mathsf{K}(\vartheta)$ gehörigen Einheitswurzeln bestimmt, während $\mathfrak{W}$ wesentlich durch Einbettungseigenschaften von $\mathsf{K}(\vartheta)$ bestimmt ist. Ist $\mathfrak{A}$ die Gruppe [21]) aller Schiefkörper mit dem Zentrum K, die von endlichem Rang über K sind, und bedeutet $\mathfrak{B}$ die Untergruppe von $\mathfrak{A}$, die aus allen Schiefkörpern mit $\mathsf{K}(\vartheta)$ als regulärem Zerfällungskörper besteht, so ist $\mathfrak{B}$ zu $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{W}}$ einstufig isomorph.

Will man alle Schiefkörper eines festen Index μ (also vom Range μ^2) mit dem Zentrum K aufstellen, so braucht man nur Normalkörper $\mathsf{K}(\vartheta)$ von einem Grad m über K zu berücksichtigen, der $\mu!\,\mu^\mu = N$ nicht übersteigt (vgl. § 6). Zu jedem derartigen $\mathsf{K}(\vartheta)$ hat man die Zahl n und danach alle in Frage kommenden Erweiterungen $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{N}$ zu bestimmen; die Ordnung von $\mathfrak{H}$ ist dabei höchstens N^2. Zu jedem derartigen $\mathfrak{H}$ gehört dann ein Schiefkörper Δ mit K als Zentrum und $\mathsf{K}(\vartheta)$ als regulärem Zerfällungskörper. Man kann dabei ein einfaches System hyperkomplexer Größen A explizit angeben, das einer vollständigen Matrixalgebra mit Koeffizienten aus Δ isomorph ist. Um Δ zu erhalten, müssen wir A nach dem Maclagan-Wedderburnschen Satz als direktes Produkt eines Schiefkörpers Δ und einer vollständigen Matrixalgebra aus K darstellen.

Der Index von Δ braucht allerdings nicht gerade μ zu sein; dies muß man in der oben geschilderten Weise durch Untersuchung von Einbettungseigenschaften feststellen [22]). Dabei sind nur Körper und Gruppen heranzuziehen, deren Grad bzw. Ordnung unter einer nur von μ abhängigen Schranke liegt.

Man wird i. a. denselben Schiefkörper sehr oft erhalten, man muß also noch entscheiden, ob zwei in dieser Weise konstruierte Schiefkörper isomorph sind. Dies geschieht nach Satz 8. Die bei der Untersuchung auftretenden Körper $\mathsf{K}(\vartheta, \varrho)$ sind dabei höchstens vom Grad N^2, die zu berücksichtigenden Gruppen höchstens von der Ordnung N^3.

Hervorgehoben sei noch, daß, wenn K ein algebraischer Körper von endlichem Grad über dem Körper der rationalen Zahlen ist, jede Einbettungsfrage für $\mathsf{K}(\vartheta)$ in einen relativ zyklischen Körper sich in endlich vielen Schritten beantworten läßt.

Zum Schluß noch eine einfache Bemerkung, die unter Umständen die Bestimmung des Index erleichtert. *Enthält die Erweiterung $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{N}$ eine zu $\mathfrak{N}$ teilerfremde Untergruppe $\mathfrak{R}$ der Ordnung r und ist m die Ordnung von $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{N}}$, so ist der Index eines zugehörigen Schiefkörpers ein Teiler von $\frac{m}{r}$* [23]). Denn ist $\tilde{\mathfrak{G}}$ die aus $\mathfrak{R}$ bei der homomorphen Abbildung von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{G}$ entstehende Gruppe, so hat $\tilde{\mathfrak{G}}$ ebenfalls die Ordnung r. Ist $\mathsf{K}(\alpha)$ der zur Unter-

[21]) Vgl. R. Brauer, Über die algebraische Struktur von Schiefkörpern; erscheint in dieser Zeitschrift.

[22]) Im § 6 wird übrigens das Verfahren so abgeändert werden, daß man von vornherein sicher ist, nur Schiefkörper Δ zu erhalten, deren Index μ nicht übersteigt.

[23]) n braucht dabei nur den Bedingungen von § 2 zu genügen.

gruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ gehörende Teilkörper von $\mathsf{K}(\vartheta)$, so hat daher $\mathsf{K}(\alpha)$ den Grad $\frac{m}{r}$. Ersetzt man den Grundkörper K durch $\widetilde{\mathsf{K}} = \mathsf{K}(\alpha)$, so hat man nach dem oben Gezeigten $\mathfrak{H}$ durch $\widetilde{\mathfrak{H}} = \mathfrak{N}\mathfrak{N}$ zu ersetzen; nach Satz 4′ ist dann der Index 1, und also $\mathsf{K}(\alpha)$ Zerfällungskörper, woraus die Behauptung folgt.

§ 6. Übergang von einem beliebigen zu einem regulären Zerfällungskörper.

$\mathsf{K}(\varrho)$ sei ein beliebiger Zerfällungskörper eines Schiefkörpers Δ; der Übergang von von $\mathsf{K}(\varrho)$ zu einem regulären Zerfällungskörper soll jetzt noch genauer untersucht werden. Der Grad von $\mathsf{K}(\varrho)$ sei mit m, die Konjugierten zu ϱ mit $\varrho_1 = \varrho, \varrho_2, \ldots, \varrho_m$ bezeichnet. Besitzt das Faktorensystem $c_{\alpha\beta\gamma}$ von Δ als Exponenten einen Teiler einer Zahl n, so gibt es m^2 Zahlen $k_{\alpha\beta}$, derart daß

$$\frac{k_{\alpha\beta}\, k_{\beta\gamma}}{k_{\alpha\gamma}} = c^n_{\alpha\beta\gamma}, \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, m) \tag{21}$$

gilt und die $k_{\alpha\beta}$ den Bedingungen genügen: 1) $k_{\alpha\beta}$ ist eine von Null verschiedene Zahl von $\mathsf{K}(\varrho_\alpha, \varrho_\beta)$; 2) Geht bei Anwendung einer Permutation der Galoisschen Gruppe von $\mathsf{K}(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m)$ gerade ϱ_α in ϱ_γ, ϱ_β in ϱ_δ über, so geht $k_{\alpha\beta}$ in $k_{\gamma\delta}$ über.

Ersetzt man in (21) n durch m, so kann man die $k_{\alpha\beta}$ in der Form

$$k_{\alpha\beta} = \prod_{\delta=1}^{m} c_{\alpha\beta\delta}$$

wählen. Denn es ist klar, daß diese Zahlen den Bedingungen 1) und 2) genügen; aus den Assoziativitätsbedingungen für die $c_{\alpha\beta\gamma}$ folgt (21) mit m anstelle von n. Aus dieser Bemerkung ergibt sich der einfachste Beweis dafür, daß der Exponent von c im Index aufgeht.

Wir adjungieren jetzt zu $\mathsf{K}(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m)$ alle Werte von $\sqrt[n]{k_{1\gamma}}$, $(\gamma = 2, 3, \ldots, m)$. Der entstehende Körper $\mathsf{K}(\vartheta)$ ist höchstens vom Grad $m!\,\varphi(n)\,n^{m-1}$, wo φ die Eulersche Funktion bedeutet. Wegen (21) (für $\alpha = 1$) enthält $\mathsf{K}(\vartheta)$ auch alle Werte von $\sqrt[n]{k_{\beta\gamma}}$ für alle β, γ; daher ist $\mathsf{K}(\vartheta)$ ein Normalkörper. Die Konjugierten zu ϑ seien $\vartheta_1 = \vartheta, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_g$.

Wir ersetzen den Zerfällungskörper $\mathsf{K}(\varrho)$ durch $\mathsf{K}(\vartheta)$, wir bezeichnen die zugehörige Erweiterung von $c_{\alpha\beta\gamma}$ mit $c_{A,B,C}$, wo A, B, C die Elemente der Galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathsf{K}(\vartheta)$ durchlaufen. Nach § 1 und U. § 3 hat man zu setzen

$$c_{A,B,C} = c_{\alpha\beta\gamma},$$

wenn A gerade ϱ_1 in ϱ_α, B ebenso ϱ_1 in ϱ_β, C schließlich ϱ_1 in ϱ_γ transformiert. Analog setzen wir

$$k_{A,B} = k_{\alpha\beta},$$

dann folgt aus (21) für alle A, B, C aus $\mathfrak{G}$

$$\frac{k_{A,B}\, k_{B,C}}{k_{A,C}} = c^n_{A,B,C}\,. \tag{22}$$

Gehört $\mathsf{K}(\varrho)$ zur Untergruppe $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{G}$, so gilt speziell

$$c_{S_1 A, S_2 B, S_3 C} = c_{A,B,C}, \qquad (S_1, S_2, S_3 < \mathfrak{S}).$$

Schließlich setzen wir

$$\varkappa_{A,E} = \sqrt[n]{k_{A,E}}, \qquad \varkappa_{AB,B} = \varkappa^B_{A,E},$$

wo die n-te Wurzel beliebig gewählt ist, nur schreiben wir vor

$$\varkappa_{S,E} = 1, \qquad (S < \mathfrak{S}),$$

was wegen $k_{S,E} = k_{11} = 1$ möglich ist. $\varkappa_{A,B}$ ist stets eine Zahl aus $\mathsf{K}(\vartheta)$. Für alle A, B aus $\mathfrak{G}$ gilt

$$\varkappa_{A,B}^{n} = k_{A,B}. \tag{23}$$

Das Faktorensystem

$$c^*_{A,B,C} = c_{A,B,C}\,\frac{\varkappa_{A,C}}{\varkappa_{A,B}\varkappa_{B,C}}$$

ist, wie leicht zu sehen ist, zu $c_{A,B,C}$ assoziiert. Erhebt man die Zahlen von c^* in die n-te Potenz, so erhält man 1 nach (22) und (23). c^* besteht also nur aus n-ten Einheitswurzeln, $\mathsf{K}(\vartheta)$ ist ein regulärer Zerfällungskörper.

Wählt man A und B speziell als Elemente von $\mathfrak{S}$ und $C = E$, so gilt

$$c_{A,B,C} = 1, \quad \varkappa_{A,C} = 1, \quad \varkappa_{B,C} = 1, \quad \varkappa_{A,B} = \varkappa^{B}_{AB^{-1},E} = 1$$

und also ergibt sich

$$c^*_{A,B,C} = 1\,, \qquad (A, B, C < \mathfrak{S}). \tag{24}$$

Schreibt man für c^* wieder c und konstruiert man nach § 2 die zugehörige Gruppe $\mathfrak{H}$, so folgt aus (24) und (9), daß die Matrizen Z_A mit $A < \mathfrak{S}$ eine Untergruppe $\mathfrak{R}$ bilden, die zu $\mathfrak{N}$ teilerfremd ist. Die Ordnung von $\mathfrak{R}$ ist $\frac{g}{m}$. Da in unserem Fall die Ordnung von $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{R}}$ mit g bezeichnet ist, geht nach der Schlußbemerkung von § 5 aus der Existenz einer derartigen Gruppe $\mathfrak{R}$ umgekehrt unmittelbar hervor, daß es Zerfällungskörper vom Grad m gibt.

Bei geeigneter Wahl von $\mathsf{K}(\varrho)$ kann man für m den Index μ von Δ wählen, für n kann man den Exponenten ν von Δ nehmen.

Satz 10: *Ein Schiefkörper Δ vom Index μ und dem Exponenten ν besitzt reguläre Zerfällungskörper $\mathsf{K}(\vartheta)$ von einem Grad, der $\mu!\,\varphi(\nu)\nu^{\mu-1}$ nicht übertrifft. Bei geeigneter Wahl von $\mathsf{K}(\vartheta)$ gehört außerdem zu Δ eine Erweiterung $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{N}$, die eine zu $\mathfrak{N}$ teilerfremde Untergruppe $\mathfrak{R}$ vom (gewöhnlichen gruppentheoretischen) Index $\nu\mu$ enthält; $\mathfrak{N}$ ist dabei die zyklische Gruppe der Ordnung ν. Aus der Existenz eines derartigen $\mathfrak{R}$ folgt umgekehrt, daß der Index von Δ ein Teiler von μ ist.*

Man braucht also in § 5 bei der Aufstellung aller Schiefkörper nur Erweiterungen $\mathfrak{H}$ zu betrachten, die von diesem speziellen Typ sind; man ist dann sicher, daß Schiefkörper von größerem Index als μ nicht entstehen können. $\mathfrak{H}$ kann man außerdem als reduzierte Erweiterung von $\mathfrak{N}$ annehmen; denn sonst ist der Exponent von Δ kleiner als ν. Geht man von $\mathfrak{H}$ zu einer Erweiterung von $\mathfrak{N}$ über, wo n wie in § 5 festgelegt ist, so geht die Reduziertheit allerdings im Fall $\nu < n$ verloren.

Die in Satz 7 angegebene Schranke kann durch die schlechtere $\mu!\,\varphi(\mu)\mu^{\mu-1}$ ersetzt werden; für ungerades μ ist aber auch $\mu!\,\varphi(\mu)\mu^{\mu-2}$ zulässig. Man kann in diesem Fall dann nämlich $c_{\alpha\beta\alpha} = 1$ für alle α und β annehmen [24]). Verwendet man für $m = n = \mu$ die speziellen oben angegebenen $k_{\alpha\beta}$, so gilt

$$\prod_{\varrho=2}^{\mu} k_{1\varrho} = \prod_{\varrho=1}^{\mu} k_{1\varrho} = \prod_{\varrho,\sigma=1}^{\mu} c_{1\varrho\sigma} = 1$$

---

[24]) Denn ist, wie man annehmen darf, in (21) die Zahl n ungerade, so setze man $k'_{\alpha\beta} = k_{\alpha\beta}\,c_{\alpha\beta\alpha}^{\frac{1-n}{2}}$ für alle α, β; das assoziierte Faktorensystem $c'_{\alpha\beta\gamma} = c_{\alpha\beta\gamma}\,\frac{k'_{\alpha\gamma}}{k'_{\alpha\beta}\,k'_{\beta\gamma}}$ erfüllt, wie leicht zu sehen ist, die Bedingung $c'_{\alpha\beta\alpha} = 1$.

wegen

$$c_{1\varrho\varrho} = 1, \quad c_{1\varrho\sigma}c_{1\sigma\varrho} = c_{\varrho\sigma\varrho}c_{1\varrho\varrho} = 1.$$

Es genügt also, die μ-ten Wurzeln aus $k_{13}, k_{14}, \ldots, k_{1\mu}$ zu adjungieren, $\sqrt[\mu]{k_{12}}$ gehört dann von selbst zu $\mathsf{K}(\vartheta)$.

§ 7. Anwendungen und Beispiele.

Wir behandeln zunächst einen fast trivialen Satz, der die Aufstellung der in Frage kommenden Erweiterungen $\mathfrak{H}$ erleichtert.

Satz 11: *$\mathfrak{H}$ sei eine reduzierte Erweiterung einer zyklischen Gruppe $\mathfrak{N}$ mit Hilfe von $\mathfrak{G}$. Läßt sich $\mathfrak{G}$ durch r von seinen Elementen erzeugen, so gilt das gleiche für $\mathfrak{H}$. Im Fall eines zyklischen regulären Zerfällungskörpers kommen also nur reduzierte $\mathfrak{H}$ in Betracht, die zyklisch sind.*

Beweis: Sind $G_1, G_2, \ldots, G_r$ erzeugende Elemente von $\mathfrak{G}$, so suchen wir r Elemente H_ϱ, derart daß H_ϱ bei der homomorphen Abbildung von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{G}$ in G_ϱ übergeht. Ist $\mathfrak{H}'$ die von den H_ϱ erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{H}$, so wird $\mathfrak{H}$ sicher durch $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{N}$ erzeugt. Da $\mathfrak{N}$ invariante Untergruppe von $\mathfrak{H}$ ist, folgt $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}'\mathfrak{N}$. Soll nun $\mathfrak{H}$ reduziert sein, so muß $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}'$ nach Satz 4 gelten.

Wir betrachten jetzt Grundkörper K mit folgender Eigenschaft: *Jeder algebraische Körper endlichen Grades über K soll relativ zyklisch sein.* Offenbar hat dann jeder derartige algebraische Körper über K diese selbe Eigenschaft wie K. Ferner kann K zu einem festen Grad r höchstens einen algebraischen Körper r-ten Grades besitzen, da das Kompositum zweier derartiger Körper notwendig nicht zyklisch ist. Ist s ein Teiler von r, so enthält ein Körper r-ten Grades einen Teilkörper vom Grade s.

q sei eine Primzahl; wir wollen weiter voraussetzen, *daß es einen Körper q-ten Grades über K gibt und daß K nicht die Charakteristik q hat*; *außerdem noch im Fall $q = 2$, daß K die Größe $i = \sqrt{-1}$ enthält.* Die Artin-Schreiersche Theorie der reellen Körper [25]) ergibt dann fast unmittelbar die Tatsache, daß dann auch *für alle Potenzen q^t Körper des betreffenden Grades über K existieren.*

Wir beweisen es auch noch einmal mit den in der vorliegenden Arbeit entwickelten Methoden. Für die Potenz q^t sei bereits die Existenz des Körpers gezeigt, $(t \geqq 1)$. Wir adjungieren zu diesem eine primitive q^{2t+1}-te Einheitswurzel, der entstehende Körper $\mathsf{K}(\vartheta)$ sei vom Grad $q^t s$. Geht q in s auf, so sind wir fertig. Im andern Fall sei K^* der Teilkörper s-ten Grades. Es genügt zu zeigen, daß über K^* ein Körper vom Grad q^{t+1} existiert, wir dürfen also annehmen $\mathsf{K}^* = \mathsf{K}$, $s = 1$.

$\mathfrak{G}$ von der Ordnung q^t sei die Galoissche Gruppe von $\mathsf{K}(\vartheta)$, $\mathfrak{N}$ bedeute die zyklische Gruppe der Ordnung $n = q^{2t+1}$. K selbst kann man als Schiefkörper mit dem Zentrum K auffassen, dazu gehöre die Erweiterung $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{N}$ mit Hilfe von $\mathfrak{G}$. Entspricht dem Element H von $\mathfrak{H}$ ein erzeugendes Element von $\mathfrak{G}$, so liefert $H^{-1}\mathfrak{N}H = \mathfrak{N}$ einen Automorphismus α von $\mathfrak{N}$, die Ordnung von α ist ein Teiler von q^t. Ist q ungerade, so wird

---

[25]) Vgl. die beiden Arbeiten: E. Artin und O. Schreier, Algebraische Konstruktion reeller Körper, Abhandl. a. d. Math. Seminar Hamburg **5** (1927), S. 85—89, und Eine Kennzeichnung der reell abgeschlossenen Körper, ebendort S. 225—231, ferner auch die vorangehende Arbeit von Herrn E. Artin, Kennzeichnung des Körpers der reellen algebraischen Zahlen, Abhandl. a. d. Math. Seminar Hamburg **3** (1924), S. 319—323. Die Behauptung folgt dann im wesentlichen aus den Sätzen 3 und 4 der ersten Artin-Schreierschen Arbeit, die man auch umgekehrt aus den oben angegebenen Tatsachen leicht herleitet. In der zweiten Artin-Schreierschen Arbeit wird auch der in unserem Zusammenhang nicht interessierende Fall behandelt, daß K gerade die Charakteristik q hat.

dabei bekanntlich die Untergruppe vom Index q^t (d. h. von der Ordnung q^{t+1}) elementweise in sich transformiert, die q^{t+1}-ten Einheitswurzeln gehen also bei G in sich über und gehören daher zu K. Im Fall $q = 2$ bestehen für α noch andere Möglichkeiten, dann geht aber das Element 4-ter Ordnung von $\mathfrak{N}$ nicht in sich über. Da i zu K gehört, kommen diese Fälle für uns nicht in Frage. Auch wenn $q = 2$ ist, muß K die q^{t+1}-ten Einheitswurzeln enthalten.

$\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ seien die zyklischen Gruppen der Ordnungen $n_1 = q^{t+1}$ bzw. $n_2 = q$; $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ seien die zyklischen Erweiterungen von $\mathfrak{N}_1$ bzw. $\mathfrak{N}_2$ mit Hilfe von $\mathfrak{G}$. Da die n_1-ten Einheitswurzeln Größen von K sind, gehören zu $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ Schiefkörper Δ_1 und Δ_2. Bildet man von $\mathfrak{H}_1$, aufgefaßt als Element der Gruppe $\mathfrak{Z}$ in § 4, die q^t-te „Potenz“ und sucht die zugehörige reduzierte Erweiterung, so erhält man $\mathfrak{H}_2$. Nun ist der Index und erst recht also der Exponent von Δ_1 ein Teiler von q^t, denn $\mathsf{K}(\vartheta)$ ist Zerfällungskörper. Also folgt, daß Δ_2 den Exponenten 1 hat und folglich mit K identisch ist. Nach Satz 7 gibt es dann einen Körper mit der Gruppe $\mathfrak{H}$, d. h. vom Grad q^{t+1} über K. Das liefert die Behauptung.

Jetzt können wir einen Satz beweisen, der in den Spezialfällen, daß K ein Körper mit nur endlich vielen Elementen oder der Körper aller reellen Zahlen ist, bekannte Sätze enthält.

Satz 12: K *sei ein vollkommener Körper, alle algebraischen Körper über* K *seien zyklisch. Ist* K *im Artin-Schreierschen Sinn nicht reell* [26]*, so gibt es (außer* K *selbst) keinen Schiefkörper mit dem Zentrum* K. *Ist dagegen* K *reell, so bilden die Quaternionen mit Koeffizienten aus* K *den einzigen derartigen Schiefkörper.*

Beweis: Δ sei ein Schiefkörper mit K als Zentrum, ν sei der Exponent von Δ und $\mathsf{K}(\vartheta)$ ein zugehöriger regulärer Zerfällungskörper. Ist $\mathfrak{N}$ die zyklische Gruppe ν-ter Ordnung, so möge Δ zu der Erweiterung $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{N}$ mit Hilfe von $\mathfrak{G}$ gehören, wo $\mathfrak{G}$ die Galoissche Gruppe von $\mathsf{K}(\vartheta)$ bedeutet. $\mathfrak{H}$ ist dann von selbst reduziert, nach Satz 11 also zyklisch. Ist m der Grad von $\mathsf{K}(\vartheta)$, so ist $m\nu$ die Ordnung von $\mathfrak{H}$. Nach Satz 7 haben wir zu untersuchen, ob ein algebraischer Körper von einem durch $m\nu$ teilbaren Grad über K existiert. Dieser enthält nämlich dann einen Körper vom Grad $m\nu$, der von selbst zyklisch ist und $\mathsf{K}(\vartheta)$ enthält.

Fall 1: K *enthält* i. Die Charakteristik von K ist Null oder von selbst zu ν teilerfremd (§ 2). Ist q eine in ν aufgehende Primzahl, so geht q auch in dem Vielfachen m von ν auf, daher gibt es Körper q-ten Grades über K und nach den vorausgeschickten Hilfsbetrachtungen auch Körper von allen Graden q^t über K. Durch Komposition dieser Körper für alle q und geeignete t und von $\mathsf{K}(\vartheta)$ findet man dann einen Körper, dessen Grad durch $m\nu$ teilbar ist. Nach dem oben Bemerkten ist daher Δ mit K selbst identisch.

Fall 2: K *enthält* i *nicht.* Es sei $\mathsf{K}' = \mathsf{K}(i)$. Ersetzt man K durch K' als Grundkörper, so bleibt der Index μ von Δ ungeändert oder er wird halbiert. In bezug auf K' ist aber, wie gezeigt, der Index 1; es kann also nur $\mu = 1$ oder 2 gewesen sein. $\mu = 2$ ist nur dann möglich, wenn über K keine Körper vierten Grades, über K' also keine quadratischen Körper existieren, da man sonst wie im Fall 1 schließen kann. K' selbst muß regulärer Zerfällungskörper sein, $\mathfrak{H}$ muß die Ordnung 4 haben und zyklisch sein. Zu $\mathsf{K}(i)$ und der zyklischen Gruppe vierter Ordnung gehören aber gerade die Quaternionen, (vgl. die folgenden Beispiele). Die Bedingung, daß sie keine Nullteiler besitzen,

[26]) Vgl. die in [25]) genannten Arbeiten von Artin und Schreier.

ist, daß in K die Zahl -1 nicht als Summe von zwei Quadraten darstellbar ist. Daraus folgt, da $\mathsf{K}(i)$ der einzige quadratische Körper über K ist, auf einfache Weise [27]), daß K reell ist.

Ist umgekehrt K reell, so stellen die Quaternionen sicher einen Schiefkörper mit K als Zentrum dar. Damit ist Satz 12 bewiesen.

Wir betrachten jetzt noch bei Zugrundelegung eines beliebigen Grundkörpers K Gruppen $\mathfrak{H}$ der einfachsten Typen. Abelsche Gruppen $\mathfrak{H}$ können nur reduziert sein, wenn sie zyklisch sind; zyklische Erweiterungen der Gruppe n-ter Ordnung kommen nur in Frage, wenn die n-ten Einheitswurzeln zu K gehören [28]).

Nehmen wir speziell für $\mathfrak{H}$ die zyklische Gruppe 4-ter Ordnung. Von trivalen Fällen abgesehen muß dann der reguläre Zerfällungskörper quadratisch sein, $\mathsf{K}(\vartheta) = \mathsf{K}(\sqrt{d})$; es handelt sich um gewisse Systeme von verallgemeinerten Quaternionen, die nach § 1 eine Basis $1, T, Z, ZT$ mit den Multiplikationsregeln

$$T^2 = d, \quad Z^2 = -1, \quad ZT = -TZ \tag{25}$$

besitzen. Die Bedingung dafür, daß sie wirklich einen Schiefkörper Δ bilden, ist nach Satz 7 die, daß man $\mathsf{K}(\sqrt{d})$ nicht in einen zyklischen Körper 4-ten Grades einbetten kann. Δ erscheint dann gewissermaßen als Ersatz für diesen fehlenden Körper. Unmittelbare Untersuchung des Faktorensystems ergibt die äquivalente Bedingung, daß -1 nicht Relativnorm einer Zahl aus $\mathsf{K}(\sqrt{d})$ sein darf, was gerade bedeutet, daß d in K nicht als Summe zweier Quadrate darstellbar sein darf. Ist K der Körper der rationalen Zahlen, so ergibt U. § 4 [29]), daß (25) dann und nur dann einen Schiefkörper liefert, wenn entweder $d < 0$ ist oder im Fall $d > 0$ in $\mathsf{K}(\sqrt{d})$ keine Einheit der Norm -1 vorkommt und jede ambige Idealklasse ein ambiges Ideal enthält. Die Äquivalenz der verschiedenen Formen der Bedingung ist natürlich auch unmittelbar zu sehen.

Die verallgemeinerten Quaternionen, soweit sie nicht durch (25) erfaßt werden, besitzen einen regulären Zerfällungskörper vierten Grades, $\mathfrak{H}$ kann man als die Diedergruppe der Ordnung 8 wählen.

Ist $\mathsf{K}(\vartheta)$ ein zyklischer Körper vierten Grades und $n = 2$, so kommt als nichttriviales Beispiel nur die zyklische Gruppe achter Ordnung in Frage. Der Exponent eines zugehörigen Schiefkörpers Δ ist 1 oder 2, der Index kann 1, 2 oder 4 sein. Ist K ein algebraischer Zahlkörper, so folgt aus einem allgemeinen Satz von Herrn Hasse [30]), daß nur die ersten beiden Fälle in Frage kommen. Dagegen ist es nicht schwer, andere Körper anzugeben, bei denen der dritte Fall eintritt, also Exponent und Index voneinander verschieden sind. Das zeigt, daß bei der Untersuchung von Herrn Hasse über zyklische Algebren die Voraussetzung wesentlich ist, daß der Grundkörper ein algebraischer Zahlkörper ist; was auch nicht als überraschend angesehen werden kann.

Auch mit Hilfe der Quaternionengruppe von der Ordnung 8 kann man leicht Schiefkörper vom Index 4 und Exponenten 2 konstruieren; K ist dabei ebenfalls kein algebraischer Körper.

---

[27]) Vgl. die in [25]) genannte Artinsche Arbeit.

[28]) Die zu zyklischen Gruppen $\mathfrak{H}$ gehörigen Schiefkörper sind *spezielle* zyklische Algebren im Sinn von Herrn H. Hasse, Theorie der zyklischen Algebren über einem algebraischen Zahlkörper, Nachr. v. d. Gesellschaft d. Wissensch. zu Göttingen 1931, S. 70—79.

[29]) Man sieht übrigens leicht ein, daß die dort mit K bezeichnete Idealklasse nicht nur, wie in U. angegeben, eine mit ihren relativkonjugierten übereinstimmende n-te Potenz besitzen muß, sondern sogar selbst mit ihren relativkonjugierten übereinstimmt. K^n enthält ein Ideal, das mit seinen relativ konjugierten übereinstimmt.

[30]) Vgl. die in [28]) zitierte Arbeit von Herrn Hasse.

Schließlich soll noch an einem Beispiel gezeigt werden, daß die Festsetzungen in § 2 bei der Definition der Erweiterung einer Gruppe notwendig waren. Ist K der Körper der rationalen Zahlen, $\mathsf{K}(\vartheta) = \mathsf{K}(i, \sqrt{5})$ so ist die Galoissche Gruppe $\mathfrak{G}$ die Vierergruppe. A und B seien erzeugende Elemente, und zwar möge i durch A und $\sqrt{5}$ durch B invariant gelassen werden. Durch $C^4 = E$, $D^2 = E$ definieren wir eine Abelsche Gruppe $\mathfrak{H}$ vom Typ (4, 2); identifizieren wir $\mathfrak{N}$ mit der von E, C^2 gebildeten Untergruppe, so kann man $\mathfrak{H}$ dadurch als Erweiterung mit Hilfe von $\mathfrak{G}$ definieren, daß man $C \to A$, $D \to B$ vorschreibt. Der zugehörige Schiefkörper ist aber K selbst, weil der Körper der 20-ten Einheitswurzeln eine Einbettung der betreffenden Art liefert. Macht man dagegen $\mathfrak{H}$ dadurch zur Erweiterung, daß man $D \to A$, $C \to B$ vorschreibt, so hat das zugehörige Δ nicht den Index 1. Denn wenn das Einbettungsproblem eine Lösung hätte, so erhielte man dabei auch eine Einbettung von $\mathsf{K}(i)$ in einen zyklischen Körper vierten Grades. Also ist hier Δ ein wirklicher Schiefkörper $\neq \mathsf{K}$, beide Erweiterungen spielen also eine ganz verschiedene Rolle.

Eingegangen 1. November 1931.